

B - Cálculo III - Segunda Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

August 10, 2017

1. Calcule os limites:

(a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}},$$

(b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2},$$

2. Utilizando a definição de limite, prove formalmente que:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} 3x - 5y + 7 = -5,$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} -x + 4y + 4 = 10,$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} x^2 + y^2 - 2x + 1 = 9,$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} 4x^3 + 3x^2 - 2y^2 - 2x + 3y + 9 = 8,$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} x^4 y^3 + y = 10.$

3. Para as funções abaixo indicadas, mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe, onde

(a)

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

(b)

$$f(x, y) = \frac{xy}{|xy|},$$

(c)

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

(d)

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

(e)

$$f(x, y) = \frac{x^9 y}{(x^6 + y^2)^2}.$$

4. Para as funções $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo indicadas, mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe e calcule o seu valor, onde

(a)

$$f(x, y) = x \cos \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right),$$

(b)

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

(c)

$$f(x, y) = \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2},$$

(d)

$$f(x, y) = \cos \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right).$$

5. Para as funções $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo indicadas, calcule, se existir, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ e discuta sobre a possibilidade ou não de tais funções serem estendidas continuamente para $(0, 0)$, definindo apropriadamente $f(0, 0)$, onde

(a)

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{3x^4 - x^2 y^2 + 3y^4}{x^2 + y^2} + 2 \right),$$

(b)

$$f(x, y) = \ln \left(x^2 \cos^2 \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) + 3 \right).$$

6. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Utilizando a definição de limite, prove formalmente que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} ax + by + c = ax_0 + by_0 + c.$$

7. Sejam $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ onde $a \neq 0$, $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

Utilizando a definição de limite, prove formalmente que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = ax_0^2 + by_0^2 + cx_0 y_0 + dx_0 + ey_0 + f.$$

8. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não-vazio. Sejam $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais e seja $\mathbf{x}_0 \in D'$. Suponha que existem $K > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $\mathbf{x} \in D$ e $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$, então

$$|g(\mathbf{x})| < K.$$

Assuma

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0.$$

Sob tais hipóteses, prove que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0.$$

9. Use o item 8 para provar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0,$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + x - y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 5, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

10. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio e seja $\mathbf{x}_0 \in D'$.

Assuma que $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ são tais que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = M \in \mathbb{R},$$

onde $L < M$.

Prove que existe $\delta > 0$ tal que se $\mathbf{x} \in D$ e $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$, então

$$f(\mathbf{x}) < \frac{L+M}{2} < g(\mathbf{x}).$$

Dica: Defina $\varepsilon = \frac{M-L}{2}$.

11. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Assuma que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto. Prove que $f^{-1}(A)$ é aberto,

$$f^{-1}(A) = \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \in A\}.$$

12. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $c \in \mathbb{R}$.

Prove que os conjuntos B e C são fechados, onde,

(a) $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq c\}$.

(b) $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = c\}$.

13. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

Assuma que $F \subset \mathbb{R}$ é fechado. Prove que existe um conjunto fechado $F_1 \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(F) = D \cap F_1$, onde

$$f^{-1}(F) = \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) \in F\}.$$

14. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}, & \text{se } x+y \neq 0 \\ 1, & \text{se } x+y = 0. \end{cases}$$

Prove que f é contínua em todo o \mathbb{R}^2 .

15. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Prove que f é contínua no \mathbb{R}^2 .