B - Cálculo III - Terceira Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

August 19, 2017

1. Mediante a definição de derivada parcial, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $3x + 2y > 0$, calcule
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$
onde
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3x+2y}}.$$

2. Mediante a definição de derivada parcial, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 - y \neq 0$, calcule
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$
onde
$$f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y}.$$

3. Utilizando a definição de diferenciabilidade, prove que as funções abaixo indicadas são diferenciáveis nos respectivos domínios:
   (a) $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2$,
   (b) $f(x,y) = 2xy^2 - 3xy$,
   (c) $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Prove que $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem mas f não é diferenciável em $(0,0)$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Prove que $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem e que f é diferenciável em $(0,0)$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}, & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Prove que f é diferenciável em $(0,0,0)$.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Obtenha $\Delta f(0,0,\Delta x,\Delta y)$.
   (b) Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.
   (c) Mediante a definição de diferenciabilidade, prove que f é diferenciável em $(0,0)$.

9. Para as funções abaixo indicadas, obtenha os respectivos domínios e utilizando as condições suficientes vistas em aula, prove que as mesmas são diferenciáveis (nos domínios em questão):

   (a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+5y}$
   (b) $f(x,y) = y\ln x - x/y$,
   (c) $f(x,y) = \arctan(x^2-y) + \frac{1}{\sqrt{x^2-y}}$,

10. Para as funções abaixo indicadas, calcule o diferencial total dw, onde

   (a) $w = \ln(x^2+y^2+e^{z^2})$,
   (b) $w = \frac{e^{x^2yz}}{x^2+y^2+z^3}$,
   (c) $w = \cos^3(\sqrt{x^2+y^2})e^{x^2+y^5}$.

11. Use o conceito de diferencial total para estimar o erro máximo no cálculo da área de um triângulo retângulo, cujos catetos medem $6m$ e $8m$ e cujo possível erro em cada medida é de $0.1m$. Calcule também o erro percentual aproximado.

12. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo. Suponha que todas as derivadas parciais de f sejam zero em todos os pontos de D. Prove que f é constante em D.

13. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo aberto e seja $f : D \to \mathbb{R}$. Assuma que f possui derivadas parciais em todos os pontos de D. Sejam (x, y) e $(x + u, y + v) \in D$.

    Prove the existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que:

$$f(x + u, y + v) - f(x, y) = f_x(x + \lambda u, y + v)u + f_y(x, y + \lambda v)v.$$

14. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e convexo e seja $f : D \to \mathbb{R}$. Suponha que exista $K > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| \leq K, \ \forall \mathbf{x} \in D, \ \ j \in \{1, .., n\}.$$

    Prove que

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq Kn|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D.$$

15. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbf{x_0} \in D$. Prove que existem $\delta > 0$ e $K > 0$ tais que se $|\mathbf{h}| < \delta$ então $\mathbf{x_0} + h \in D$ e

$$|f(\mathbf{x_0} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x_0})| < K|\mathbf{h}|.$$

16. Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^c$, onde $c \in \mathbb{R}$. Sejam $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$.

    Calcule

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$