B - Cálculo III - Quarta Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

August 27, 2017

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y,t) = \frac{t^2+y}{e^t + x^2 + t^2}.$$
Suponha que as funções $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sejam dadas por
$$x(t) = \cos^2(t^3),$$
e
$$y(t) = e^{t^2}.$$
Utilizando a regra da cadeia, calcule $g'(t)$ onde $g(t) = f(x(t), y(t), t), \;\; \forall t \in \mathbb{R}$.
Finalmente, obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de g nos pontos $t = 0$ e $t = \pi$.

2. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+xy}{z^2+e^x+cos^2(y)}.$$
Seja $z(x,y) = cos^2(x^2+y^2)$ e defina $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por
$$h(x,y) = g(x,y,z(x,y)).$$
Utilize a regra da cadeia para calcular $h_x(x,y)$ e $h_y(x,y)$.
Obtenha a equação da reta normal e do plano tangente ao gráfico de h no ponto $(1,0)$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Seja $u(x,y) = bx - ay$. Mostre que $z(x,y) = f(u(x,y))$ satisfaz à equação:
$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.
Denotando $u(r,\theta) = f(x,y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ mostre que
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r},$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

5. Considere o plano $\pi\ :\ 2x+3y+z=2$. Obtenha o ponto de π mais próximo do ponto $P(1,1,0)$. Sugestão: Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange.

6. Considere o elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

   onde $a,b,c>0$.

   Obtenha os pontos de tal superfície que estão mais próximos da origem $(0,0,0)$.

7. Seja A uma matriz real $m\times n$. Seja $\mathbf{y}_0\in\mathbb{R}^m$ e seja $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(\mathbf{x}) = \langle (A\mathbf{x}), \mathbf{y}_0\rangle,$$

   onde $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ denota o produto escalar usual no $\mathbb{R}^m$. Utilizando o método dos multiplicadors de Lagrange, obtenha os pontos de mínimo e máximo de $f(\mathbf{x})$ sob a restrição $|\mathbf{x}|=1$.

8. Obtenha três números reais positivos cuja a soma 30 e cujo produto entre eles é máximo.

   Sugestão: Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange.

9. Obtenha três números reais positivos cujo produto é 30 e cuja a soma entre eles é máxima.

   Sugestão: Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange.

10. Uma função $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ é dita ser convexa se

$$f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda\mathbf{y}))\le\lambda f(\mathbf{x})+(1-\lambda)f(\mathbf{y}),\ \forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in[0,1].$$

    (a) Suponha que $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ seja diferenciável. Mostre que f é convexa se, e somente se,

$$f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})\ge\nabla f(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\quad\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n.$$

    (b) Prove que que se f é convexa, diferenciável e $\nabla f(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ então $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ é um ponto de mínimo global para f.

11. Seja $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que

$$H(\mathbf{x})=\left\{\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}\right\}$$

    é uma matriz positiva definida, $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$.

    Mostre que f é convexa no $\mathbb{R}^n$.

12. Sejam $x \geq 0$ e $y \geq 0$, $p > 0$ e $q > 0$ tais que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Prove que

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Sugestão: Fixe $y \geq 0$. Calcule o ponto de mínimo global de

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy,$$

em $[0, +\infty)$.

Observe que f é convexa em $[0, \infty)$ assim o único ponto de extremo será um mínimio global.

13. Sejam $F, G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definidas por $F(x, y, u, v) = x^2 + y^3 - u + v^2$ e $G(x, y, u, v) = e^{2x} + e^{3y} + 2uv + 3v^2$. Assumindo as hipóteses do teorema da função implícita para funçãoes vetoriais, considere as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ definidas implicitamente numa vizinhança de um ponto $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad e \quad G(x, y, u, v) = 0.$$

Obtenha u_x, u_y, v_x e v_y.

14. Obtenha a equação do plano tangente à superfície de equação $z = f(x, y)$ no ponto $P(1, 1, 2)$, onde $z = f(x, y)$ é definida implicitamente mediante à equação

$$F(x, y, z) = z^3 + (x^2 + y^2)z - 12 = 0.$$

15. Considere as superfícies S_1 e S_2 de equações

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

e

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 8z^2 = 0.$$

Considere o ponto $P(2, 2, 1)$ na intersecção entre S_1 e S_2.

   (a) Obtenha a equação da reta tangente à curva de intersecção entre S_1 e S_2 no ponto $P(2, 2, 1)$.

   (b) Obtenha a equação do plano normal à curva de intersecção entre S_1 e S_2 no ponto $P(2, 2, 1)$.

16. Determine os pontos críticos de $z = f(x, y)$ definida implicitamente mediante à equação:

$$F(x, y, z) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2 - z^2 = 0.$$