B - Cálculo III - Oitava Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

November 20, 2017

1. Calcule a área da superfície S, onde

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } \frac{1}{2} \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

2. Calcule a área da superfície S, onde

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } \frac{-\sqrt{3}}{2} \leq z \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

3. Cacule a área da superfície S, onde

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z^2 = x^2 + y^2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2ax \right\},$$

   onde $a \in \mathbb{R}$.

4. Calcule $I = \int \int_S x \; dS$, onde

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 = R^2 \text{ e } |z| \leq 1 \right\}.$$

5. Utilizando o Teorema da divergência, calcule $I = \int \int_S (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \; dS$, onde

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \text{ e } x \geq \frac{\sqrt{3}R}{2} \right\},$$

   onde $R > 0$.

6. Utilizando o teorema da divergência, calcule $I = \int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS$ onde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 = 2R_0 x \text{ e } z \geq 0\}$$

   e onde $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ e $R_0 > 0$.

7. Sejam $u : V \to \mathbb{R}$ um campo escalar e $\mathbf{F} : V \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial, sendo $V \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $u, \mathbf{F}$ regulares. Mostre que
$$div(u\mathbf{F}) = (\nabla u) \cdot \mathbf{F} + u\,(div\mathbf{F}).$$

8. Sejam $u, v : V \to \mathbb{R}$ campos escalares regulares (de classe C^2, isto é, campos com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em V), onde $V \subset \mathbb{R}^3$ é aberto e simples. Definindo-se
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
mostre que $div(\nabla u) = \nabla^2 u$ e prove as identidades de Green:

   (a)
$$\int\int\int_V (v\nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u)\, dV = \int\int_S v(\nabla u \cdot \mathbf{n})\, dS$$
   onde $S = \partial V$ (isto é S é a fronteira de V.)

   (b)
$$\int\int\int_V (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\, dV = \int\int_S \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right)\, dS,$$
   onde $S = \partial V$ e $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$.

9. Sejam $u : V \to \mathbb{R}$, $\mathbf{F} : V \to \mathbb{R}^3$ campos de classe C^2 no aberto $V \subset \mathbb{R}^3$.
   Prove que $rot(\nabla u) = \mathbf{0}$ e que $div(rot\ \mathbf{F}) = 0$, em V.

10. Considere o campo vetorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.
    Utilizando o Teorema de Stokes, calcule
$$I = \int\int_S (rot\ \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$
    onde
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = 8 - x^2 - 2y^2 \text{ e } z \geq 2\}.$$

11. Considere o campo vetorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ onde $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + (z - x^2)\mathbf{k}$.
    Utilizando o Teorema de Stokes, calcule
$$I = \int\int_S (rot\ \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$
    onde
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ z = 8 - x^2 - 2y^2 \text{ e } 2 \leq z \leq 4\}.$$