B - Cálculo III - Cálculo Integral no $\mathbb{R}^n$

Prof. Fabio Silva Botelho

November 28, 2017

1 Integração no $\mathbb{R}^n$

1.1 Integração em blocos

Definition 1.1. *Um bloco n-dimensional $B \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto definido por*

$$B = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n],$$

onde

$$[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$$

é um intervalo não-vazio, fechado e limitado, $\forall j \in \{1, ..., n\}$.

O volume de B, denotado por $Vol(B)$, é definido como

$$vol(B) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = (b_1 - a_1)...(b_n - a_n).$$

Definition 1.2 (Partição)**.** *Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Definimos uma partição P de $[a, b]$, como*

$$P = \{x_0 = a, x_1, ..., x_m = b\},$$

onde $x_{i-1} < x_i$ $\forall i \in \{1, .., m\}$. Dado um bloco

$$B = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^n$$

definimos uma partição de B, denotada por P, por

$$P = P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$$

onde P_j é uma partição de

$$I_j = [a_j, b_j], \ \forall \{1, ..., n\}.$$

Para $P_j = \{a_j = x_0, x_1, ..., x_m = b_j\}$ *definimos sua norma, denotada por* $|P_j|$, *como*

$$|P_j| = \max\{|x_k - x_{k-1}|,\ k \in \{1, ..., m\}\}.$$

Finalmente, a norma de $P = P_1 \times ... \times P_n$ *é definida por*

$$|P| = \max\{|P_j|,\ j \in \{1, .., n\}\}.$$

Aqui enfatizamos que a partição P *de* B *divide* B *em sub-blocos.*

Definition 1.3 (Somas inferiores e superiores)**.** *Seja* $f : B_0 \to \mathbb{R}$ *uma função limitada, onde* $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ *é um bloco compacto. Seja* P *uma partição de* B_0*. Para cada sub-bloco* B *de* B_0 *(relativo a* P*), definimos,*

$$m_B = \inf\{f(\mathbf{x})\ :\ \mathbf{x} \in B\},$$

e

$$M_B = \sup\{f(\mathbf{x})\ :\ \mathbf{x} \in B\}.$$

Definimos também a soma inferior de f *relativa a* P, *denotada por* s_f^P *por*

$$s_f^P = \sum_{B \in P} m_B vol(B),$$

e a soma superior de f *relativa a* P, *denotada por* S_f^P, *por*

$$S_f^P = \sum_{B \in P} M_B vol(B).$$

Aqui $B \in P$ *significa que* B *é um sub-bloco gerado pela partição* P *de* B_0.
Observe que

$$m \leq m_B \leq M_B \leq M,\ \forall B \in P,$$

onde

$$m = \inf\{f(\mathbf{x})\ :\ \mathbf{x} \in B_0\},$$

e

$$M = \sup\{f(\mathbf{x})\ :\ \mathbf{x} \in B_0\},$$

de modo que

$$mVol(B_0) \leq s_f^P \leq S_f^P \leq MVol(B_0)$$

$\forall P$ *partição de* B_0.

Theorem 1.4. *Seja* $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ *um bloco compacto e não-vazio. Sejam* P, Q *partiçãoes de* B_0 *tais que* $P \subset Q$

Seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ *uma função limitada.*
Sob tais hipóteses,

$$s_f^P \leq s_f^Q \leq S_f^Q \leq S_f^P.$$

Proof. Vamos denotar genericamente os sub-blocos de P por B e aqueles relativos a Q por B'.

Observe que como $P \subset Q$, para cada $B' \in Q$ existe $B \in P$ tal que $B' \subset B$,

Também, se $B' \subset B$ então $m_B \leq m_{B'}$ e $M_{B'} \leq M_B$.

Assim,

$$\begin{aligned}
s_f^P &= \sum_{B \in P} m_B Vol(B) \\
&= \sum_{B \in P} m_B \left(\sum_{B' \subset B} Vol(B') \right) \\
&= \sum_{B \in P} \left(\sum_{B' \subset B} m_B Vol(B') \right) \\
&\leq \sum_{B \in P} \left(\sum_{B' \subset B} m_{B'} Vol(B') \right) \\
&= \sum_{P \in Q} m_{B'} Vol(B') \\
&= s_f^Q
\end{aligned} \tag{1}$$

Similarmente, podemos obter $S_f^P \geq S_f^Q$.

Como a desigualdade $s_f^Q \leq S_f^Q$ é óbvia, a prova está completa. □

Corolary 1.5. *Seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função limitada onde B_0 é um bloco compacto. Sejam P, Q partições de B_0.*

Sob tais hipóteses,

$$s_f^P \leq S_f^Q.$$

Proof. Observe que $P \subset P \cup Q$, e $Q \subset P \cup Q$, de modo que do último teorema

$$s_f^P \leq s_f^{P \cup Q} \leq S_f^{P \cup Q} \leq S_f^Q,$$

e assim

$$s_f^P \leq S_f^Q, \ \forall P, Q, \text{ partitions of } B_0.$$

□

Remark 1.6. *Observe que do último resultado,*

$$\sup_P s_f^P \leq \inf_Q S_f^Q.$$

Definition 1.7. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto. Seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ tal que $|f(\mathbf{x})| < K$, $\forall x \in B_0$ para algum $K > 0$.*

Assim, definimos a integral inferior de f em B_0, denotada por $\underline{I}$, por

$$\underline{I} = \sup\{s_f^P \ : \ P \text{ é uma partição de } B_0\},$$

e a integral superior de f em B_0, denotada por $\overline{I}$, por

$$\overline{I} = \inf\{S_f^P \,:\, P \text{ é partição de } B_0\}.$$

Finalmente, dizemos que f é integrável à Riemann em B_0 quando

$$\underline{I} = \overline{I},$$

e denotamos

$$\underline{I} = \overline{I} = I = \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Em tal caso $I = \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ é dita ser a integral de Riemann de f em B_0.

Theorem 1.8. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto. Seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ tal que $|f(\mathbf{x})| < K$, $\forall \mathbf{x} \in B_0$ para algum $K > 0$. Sob tais hipóteses, f é integrável à Riemann se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de B_0 tal que*

$$S_f^P - s_f^P < \varepsilon.$$

Proof. Primeiramente, provaremos que a condição é suficiente.

Suponha que a condição é válida.

Seja $\varepsilon > 0$. Assim, da condição, existe uma partição P de B_0 tal que

$$S_f^P - s_f^P < \varepsilon.$$

Observe que

$$s_f^P \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_f^P.$$

Logo,

$$\overline{I} - \underline{I} \leq S_f^P - s_f^P < \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos que

$$\overline{I} = \underline{I}.$$

Reciprocamente, suponha que

$$\overline{I} = \underline{I} \equiv I.$$

Seja (um novo) $\varepsilon > 0$. Assim, existem partições P_1 e P_2 de B_0 tais que

$$s_f^{P_1} > I - \frac{\varepsilon}{2},$$

e

$$S_f^{P_2} < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

Assim,

$$-s_f^{P_1} < -I + \frac{\varepsilon}{2},$$

de modo que

$$S_f^{P_2} - s_f^{P_1} < I - I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Observe que

$$s_f^{P_1} \leq s_f^{P_1 \cup P_2} \leq S_f^{P_1 \cup P_2} \leq S_f^{P_2},$$

e assim

$$S_f^{P_1 \cup P_2} - s_f^{P_1 \cup P_2} \leq S_f^{P_2} - s_f^{P_1} < \varepsilon.$$

Portanto, definindo $P = P_1 \cup P_2$, obtemos

$$S_f^P - s_f^P < \varepsilon.$$

Conclui-se que a condição é necessária.

A prova está completa. □

2 Propriedades da Integral de Riemann

Theorem 2.1. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto. Sejam $f_1 : B_0 \to \mathbb{R}$ e $f_2 : B_0 \to \mathbb{R}$ funções integráveis à Riemann. Sob tais hipóteses,*

$$f \equiv f_1 + f_2$$

é também integrável à Riemann e,

$$\int_{B_0} (f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_{B_0} f_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{B_0} f_2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Proof. Seja $\varepsilon > 0$.

Denotando,

$$I_1 = \int_{B_0} f_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

$$I_2 = \int_{B_0} f_2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

$$\underline{I} = \sup\{s_f^P \ :\ P \text{ é partição de } B_0\},$$

e

$$\overline{I} = \inf\{S_f^P \ :\ P \text{ é partição de } B_0\},$$

existem partiçãoes P_1 e P_2 de B_0 tais que

$$I_1 - \frac{\varepsilon}{4} < s_{f_1}^{P_1} \leq S_{f_1}^{P_1} < I_1 + \frac{\varepsilon}{4},$$

e

$$I_2 - \frac{\varepsilon}{4} < s_{f_2}^{P_2} \leq S_{f_2}^{P_2} < I_2 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Defina $Q = P_1 \cup P_2$. Portanto,

$$\begin{aligned} & I_1 + I_2 - \frac{\varepsilon}{2} \\ < \; & s_{f_1}^{P_1} + s_{f_2}^{P_2} \\ \leq \; & s_{f_1}^{Q} + s_{f_2}^{Q} \\ \leq \; & s_{f_1+f_2}^{Q} \\ \leq \; & \underline{I} \leq \overline{I} \\ \leq \; & S_{f_1+f_2}^{Q} \\ \leq \; & S_{f_1}^{Q} + S_{f_2}^{Q} \\ \leq \; & S_{f_1}^{P_1} + S_{F_2}^{P_2} \\ < \; & I_1 + I_2 + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

de modo que

$$\overline{I} - \underline{I} < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, podemos concluir que

$$\overline{I} = \underline{I} \equiv I = \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Disto e (2), obtemos

$$I_1 + I_2 - \frac{\varepsilon}{2} < I < I_1 + I_2 + \frac{\varepsilon}{2},$$

isto é,

$$|I - (I_1 + I_2)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que,

$$I = I_1 + I_2,$$

isto é

$$\int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{B_0} f_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{B_0} f_2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

A prova está completa. $\square$

Theorem 2.2. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto. Seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann.*

Sob tais hipóteses $-f$ é integrável à Riemann e

$$\int_{B_0} (-f(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = -\int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Proof. Seja $\varepsilon > 0$. Assim existe uma partição P de B_0 tal que

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s_f^P \leq S_f^P < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto,

$$-I - \frac{\varepsilon}{2} < -S_f^P \leq -s_f^P < -I + \frac{\varepsilon}{2},$$

de modo que, denotando

$$\underline{I_1} = \sup\{s_{(-f)}^P \ : \ P \text{ é partição de } B_0\},$$

e

$$\overline{I_1} = \inf\{S_{(-f)}^P \ : \ P \text{ é partição de } B_0\},$$

temos que

$$-I - \frac{\varepsilon}{2} < s_{(-f)}^P \leq \underline{I_1} \leq \overline{I_1} \leq S_{(-f)}^P < -I + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

isto é,

$$\overline{I_1} - \underline{I_1} < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$$\overline{I_1} = \underline{I_1} \equiv I_1 = \int_{B_0} (-f(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}.$$

Disto e (3) obtemos,

$$-I - \frac{\varepsilon}{2} < I_1 < -I + \frac{\varepsilon}{2},$$

de modo que

$$|I_1 - (-I)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, finalmente obtemos,

$$I_1 = -I,$$

isto é,

$$\int_{B_0} (-f(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = -\int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

A prova está completa. □

Theorem 2.3. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto. Seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann e seja $c \in \mathbb{R}$. Sob tais hipóteses cf é integrável à Riemann e*

$$\int_{B_0} cf(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = c\int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Proof. Assuma primeiramente que $c > 0$.

O caso $c = 0$ é imediato e o caso $c < 0$ será tratado no final da prova. Seja $\varepsilon > 0$. Assim existe uma partição P de B_0 tal que

$$I - \frac{\varepsilon}{2c} < s_f^P \leq S_f^P < I + \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Portanto,

$$cI - \frac{\varepsilon}{2} < cs_f^P \leq cS_f^P < cI + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, denotando,

$$\underline{I_1} = \sup\{s_{(cf)}^P \ : \ P \text{ partição de } B_0\},$$

e

$$\overline{I_1} = \inf\{S_{(cf)}^P \ : \ P \text{ partição de } B_0\},$$

temos que

$$cI - \frac{\varepsilon}{2} < s_{(cf)}^P \leq \underline{I_1} \leq \overline{I_1} \leq S_{(cf)}^P < cI + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

de modo que

$$\overline{I_1} - \underline{I_1} < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos,

$$\overline{I_1} = \underline{I_1} \equiv I_1 = \int_{B_0} cf(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Disto e (4), temos que

$$cI - \frac{\varepsilon}{2} < I_1 < cI + \frac{\varepsilon}{2},$$

isto é,

$$|I_1 - cI| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos

$$I_1 = cI,$$

isto é,

$$\int_{B_0} cf(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = c \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Agora suponha $c < 0$. Desse último resultado e do ultimo teorema,

$$-\int_{B_0} cf(\mathbf{x})\, dx = \int_{B_0} (-c) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -c \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

de modo que

$$\int_{B_0} cf(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = c \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

A prova está completa. $\square$

Theorem 2.4. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto. Seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann tal que*

$$m \leq f(x) \leq M, \ \ \forall x \in B_0,$$

para alguns $m, M \in \mathbb{R}$.

Seja $g : [m, M] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[m, M]$.

Sob tais hipóteses, $(g \circ f) : B_0 \to \mathbb{R}$ é integrável à Riemann em B_0, onde

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})), \quad \forall x \in B_0.$$

Proof. Seja $\varepsilon > 0$. Observe que sendo $[m, M]$ compacto, g é uniformemente contínua em $[m, M]$. Escolha $K > 0$ tal que

$$|g(t)| < K, \ \ \forall t \in [m, M].$$

Assim, existe $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4K}$ tal que se $s, t \in [m, M]$ e $|s - t| < \delta$, então

$$|g(s) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2Vol(B_0)}.$$

Também, sendo f integrável, existe uma partição P de B_0 tal que

$$I - \frac{\delta^2}{2} < s_f^P \leq S_f^P < I + \frac{\delta^2}{2},$$

onde

$$I = \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Portanto,

$$S_f^P - s_f^P = \sum_{B \in P}^{n} (M_B - m_B) Vol(B) < \delta^2,$$

onde denotamos,

$$m_B = \inf\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in B\},$$
$$M_B = \sup\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in B\},$$
$$m_B^* = \inf\{g(f(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in B\},$$
$$M_B^* = \sup\{g(f(\mathbf{x})) \ : \ \mathbf{x} \in B\}.$$

Denotemos por α o conjuntio dos blocos $B \in P$ tais que $M_B - m_B < \delta$. Denotemos por β o conjunto dos blocos $B \in P$ tais que $M_B - m_B \geq \delta$.

Observe que

$$\delta \sum_{B \in \beta} Vol(B) \leq \sum_{B \in \beta} (M_B - m_B) Vol(B) < \delta^2,$$

e assim,

$$\sum_{B \in \beta} Vol(B) < \delta < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

Observe que, se $B \in \alpha$, então $M_B - m_B < \delta$ e portanto

$$M_B^* - m_B^* < \frac{\varepsilon}{2Vol(B_0)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_{(g\circ f)}^P - s_{(g\circ f)}^P &= \sum_{B\in P}(M_B^* - m_B^*)Vol(B) \\ &= \sum_{B\in\alpha}(M_B^* - m_B^*)Vol(B) + \sum_{B\in\beta}(M_B^* - m_B^*)Vol(B) \\ &< \frac{\varepsilon}{2Vol(B_0)}\sum_{B\in\alpha}Vol(B) + 2K\sum_{B\in\beta}Vol(B) \\ &< \frac{\varepsilon Vol(B_0)}{2Vol(B_0)} + \frac{2K\varepsilon}{4K} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{5}$$

Resumindo,

$$S_{(g\circ f)}^P - S_{(g\circ f)}^P < \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, do Teorema 1.8 podemos concluir que $(g \circ f)$ é integrável à Riemann.

A prova está completa.

□

Proposition 2.5. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto. Sejam $f_1, f_2 : B_0 \to \mathbb{R}$ funções integráveis à Riemann.*

Sob tais hipóteses,

1. *$f_1 \cdot f_2$ é integrável à Riemann.*
2. *$|f_1|$ é integrável à Riemann e*

$$\left|\int_{B_0} f_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right| \leq \int_{B_0} |f_1(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}.$$

Proof. 1. Com $g(t) = t^2$, do último teorema e dos resultados anteriores, temos que

$$f_1 \cdot f_2 = \frac{(f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2}{4}$$

é integrável à Riemann.

2. Com $g(t) = |t|$ do último teorema $|f_1| = (g \circ f_1)$ é integrável à Riemann.

   Além disso, como
$$\pm f_1(\mathbf{x}) \leq |f_1(\mathbf{x})|, \forall \mathbf{x} \in B_0,$$
   obtemos
$$\pm \int_{B_0} f_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq \int_{B_0} |f_1(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}$$
   de modo que
$$\left| \int_{B_0} f_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| \leq \int_{B_0} |f_1(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}.$$

A prova está completa. □

Theorem 2.6. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto. Seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função contínua em B_0. Sob tais hipóteses f é integrável à Riemann em B_0.*

Proof. Seja $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em B_0 e B_0 é compacto, temos que f é uniformemente contínua em B_0. Assim, existe $\delta > 0$ tal que se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_0$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$, então
$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{2Vol(B_0)}.$$

Seja P uma partição de B_0 tal que $0 < |P| < \delta/\sqrt{n}$. Logo,
$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta, \ \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B, \ \forall B \in P.$$

Assim,
$$M_B - m_B \leq \frac{\varepsilon}{2Vol(B_0)}, \ \ \forall B \in P,$$
de modo que
$$\begin{aligned} S_f^P - s_f^P &= \sum_{B \in P} (M_B - m_B) Vol(B) \\ &\leq \sum_{B \in P} \frac{\varepsilon}{2Vol(B_0)} Vol(B) \\ &= \frac{\varepsilon Vol(B_0)}{2Vol(B_0)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, disto e do Teorema 1.8, f é integrável à Riemann em B_0. □

3 Um critério de Integrabilidade à Riemann

Nesta seção apresentaremos uma condição necessária e suficiente para integrabilidade à Riemann. Iniciaremos com a definição de medida exterior.

Definition 3.1 (Medida exterior em $\mathbb{R}^n$)**.** *Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos sua medida exterior, denotada por $m^*(A)$, por*

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Vol(B_n) \ : \ A \subset \cup_{i=1}^{n} B_n \right\},$$

onde B_n é um bloco aberto $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definition 3.2 (Conjunto mensurável à Lebesgue)**.** *Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é dito ser mensuràvel à Lebesgue, se para cada $A \subset \mathbb{R}^n$ temos que*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

onde

$$E^c = \mathbb{R}^n \setminus E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathbf{x} \notin E\}.$$

Assim, se E é mensuràvel à Lebesgue, definiremos $m(E) = m^*(E)$ onde $m(E)$ é dita ser a medida de Lebesgue de E.

Remark 3.3. *Mostraremos que se $m^*(E) = 0$, então E é mensurável à Lebesgue. De fato, seja $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $m^*(E) = 0$.*

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Como $A \cap E \subset E$, obtemos $m^*(A \cap E) = 0$.

Assim

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A). \tag{7}$$

Como é possível provar que $m^*(B \cup C) \leq m^*(B) + m^*(C), \forall B, C \subset \mathbb{R}$ obtemos

$$m^*(A) = m^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

de modo que disto e (7) temos que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \ \ \forall A \subset \mathbb{R}^n,$$

e assim E é mensurável à Lebesgue sempre que $m^*(E) = 0$.

Relembramos também que, nesse caso,

$$0 = m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Vol(B_n) \ : \ A \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_n \right\},$$

de modo que para cada $\varepsilon > 0$ podemos achar uma sequência $\{B_n\}$ de blocos abertos tal que

$$E \subset \cup_{n=1}^{\infty} B_n$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} Vol(B_n) < \varepsilon.$$

Theorem 3.4. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto. Seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função limitada em B_0. Denotemos por $A \subset B_0$ o conjunto onde f não é contínua.*

Assuma que $m(A) = 0$.

Sob tais hipóteses f é integrável à Riemann em B_0.

Proof. Da hipótese $m(A) = 0$ e existe $K > 0$ tal que

$$|f(\mathbf{x})| < K, \ \forall \mathbf{x} \in B_0.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Assim existe uma sequência de blocos abertos $\{B_m\}$ tal que $A \subset \cup_{m=1}^{\infty} B_m$ e

$$\sum_{m=1}^{\infty} Vol(B_m) < \frac{\varepsilon}{4K2^n},$$

onde sendo aberto, temos que $Vol(B_m) > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Defina $\tilde{B} = B_0 \setminus A$.

Logo f é contínua em $\tilde{B}$.

Portanto, para cada $\mathbf{x} \in \tilde{B}$, existe $\delta_{\mathbf{x}} > 0$ tal que se $\mathbf{y} \in B_0$ e $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \delta_{\mathbf{x}}$, então

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{4Vol(B_0)}. \tag{8}$$

Observe que

$$\tilde{B} \subset \cup_{\mathbf{x} \in \tilde{B}} B_{\frac{\delta_{\mathbf{x}}}{2}}(\mathbf{x}).$$

Portanto,

$$B_0 = A \cup \tilde{B} \subset [\cup_{m=1}^{\infty} B_m] \cup [\cup_{\mathbf{x} \in \tilde{B}} B_{\frac{\delta_{\mathbf{x}}}{2}}(\mathbf{x})].$$

Sendo B_0 compacto, existem $m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_p \in \tilde{B}$ tais que

$$B_0 \subset [\cup_{l=1}^{k} B_{ml}] \cup [\cup_{j=1}^{p} B_{\frac{\delta_{\mathbf{x}_j}}{2}}(\mathbf{x}_j)].$$

Defina

$$C = \min\{\delta_{\mathbf{x}_j}/2 \ : \ j \in \{1, .., p\}\},$$

e denotando,

$$B_{ml} = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n),$$

defina

$$b_{ml} = \min\{(b_i - a_i) : i \in \{1, .., n\}\}.$$

Defina também,

$$D = \min\{b_{ml} \ : \ l \in \{1, ..., k\}\},$$

e

$$\delta = \min\{C, D/2\}.$$

Seja P be a partition of B_0 tal que

$$|P| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Denote genericamente por B os blocos de P os quais interseccionam $\cup_{l=1}^{k} B_{ml}$ e por B' os demais blocos de P.

Assim, para $B' \in P$ temos que

$$B' \cap [\cup_{l=1}^{k} B_{ml}] = \emptyset.$$

Seja $B \in P$.

Assim,

$$B \cap [\cup_{l=1}^{k} B_{ml}] \neq \emptyset.$$

Portanto, existe $\tilde{l} \in \{1, ..., k\}$ tal que

$$B \cap B_{m\tilde{l}} \neq \emptyset.$$

Seja E_l o bloco com o mesmo centro de B_{ml}, com todas as faces paralelas às coreespondentes de B_{ml}, entretanto, com dimensões multiplicadas por 2, relativamente às dimensões correspondentes de B_{ml}.

Logo,

$$Vol(E_l) = 2^n Vol(B_{ml}),$$

e além disso, como a maior distância entre dois pontos de B é $\delta < D$, obtemos

$$E_{\tilde{l}} \supset B_{m\tilde{l}} \cup B,$$

de modo que

$$\cup_{B \in P} B \subset \cup_{l=1}^{k} E_l,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{B \in P} Vol(B) &= Vol(\cup_{B \in P} B) \\ &\leq Vol(\cup_{l=1}^{k} E_l) \\ &\leq \sum_{l=1}^{k} Vol(E_l) \\ &\leq 2^n \sum_{l=1}^{k} Vol(B_{ml}) \\ &\leq 2^n \sum_{m=1}^{\infty} Vol(B_m) \\ &< \frac{2^n \varepsilon}{4K 2^n} \\ &= \frac{\varepsilon}{4K}. \end{aligned} \tag{9}$$

Resumindo,

$$\sum_{B\in P} Vol(B) < \frac{\varepsilon}{4K}. \tag{10}$$

Seja $B' \in P$.
Denotemos por $\mathbf{x}'$ o centro de B'.
Observe que como $B' \cap \cup_{l=1}^{k} B_{ml} = \emptyset$, temos que

$$B' \subset \cup_{j=1}^{p} B_{\frac{\delta_{\mathbf{x}_j}}{2}}(\mathbf{x}_j).$$

Assim, existe $j_0 \in \{1, .., p\}$ tal que

$$\mathbf{x}' \in B_{\frac{\delta_{\mathbf{x}_{j_0}}}{2}}(\mathbf{x}_{j_0}).$$

Observe também que, como $|P| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ a maior distância entre dois pontos de B' é δ.
Seja $\mathbf{x} \in B'$.
Assim,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{j_0}| &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \mathbf{x}' - \mathbf{x}_{j_0}| \\ &\leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + |\mathbf{x}' - x_{j_0}| \\ &< \delta + \frac{\delta_{x_{j_0}}}{2} \\ &\leq \frac{\delta_{x_{j_0}}}{2} + \frac{\delta_{x_{j_0}}}{2} \\ &= \delta_{x_{j_0}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Logo, disto e (8), obtemos

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_{j_0})| < \frac{\varepsilon}{4Vol(B_0)}.$$

Similarmente, se $\mathbf{y} \in B'$, então

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_{j_0})| < \frac{\varepsilon}{4Vol(B_0)},$$

de modo que

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| &= |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_{j_0}) + f(\mathbf{x}_{j_0}) - f(\mathbf{y})| \\ &\leq |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_{j_0})| + |f(\mathbf{x}_{j_0}) - f(\mathbf{y})| \\ &< \frac{\varepsilon}{4Vol(B_0)} + \frac{\varepsilon}{4Vol(B_0)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2Vol(B_0)} \end{aligned} \tag{12}$$

Portanto, denotando

$$M_{B'} = \sup\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in B'\},$$

$$m_{B'} = \inf\{f(\mathbf{x})\ :\ \mathbf{x} \in B'\},$$

de (12), obtemos,

$$M_{B'} - m_{B'} \leq \frac{\varepsilon}{2Vol(B_0)}. \tag{13}$$

Por outro lado, se $B \in P$, denotando

$$M_B = \sup\{f(\mathbf{x})\ :\ \mathbf{x} \in B\}$$

e

$$m_B = \inf\{f(\mathbf{x})\ :\ \mathbf{x} \in B\},$$

como

$$|f(\mathbf{x})| < K, \forall \mathbf{x} \in B_0,$$

obtemos

$$M_B - m_B \leq 2K,\ \forall B \in P. \tag{14}$$

Assim, de (10), (13) e (14), obtemos,

$$\begin{aligned} S_f^p - s_f^P &= \sum_{B \in P}(M_B - m_B) + \sum_{B' \in P}(M_{B'} - m_{B'})Vol(B') \\ &\leq 2K \sum_{B \in P} Vol(B) + \frac{\varepsilon}{2Vol(B_0)} \sum_{B' \in P} Vol(B') \\ &< 2K\frac{\varepsilon}{4K} + \frac{\varepsilon}{2Vol(B_0)} Vol(B_0) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{15}$$

Logo,

$$S_f^P - s_f^P < \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, do Teorema 1.8, f é integrável à Riemann.

□

3.1 Oscilação

Definition 3.5. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto. Seja $f : B_0 \subset \mathbb{R}^n$ uma função limitada e seja $A \subset B_0$. Definimos a oscilação de f em A, denotada por $\omega_f(A)$, por*

$$\omega_f(A) = \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|\ :\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}.$$

Seja $\mathbf{x} \in B_0$. Definimos a oscilação de f em $\mathbf{x}$, denotada por $\omega_f(\mathbf{x})$, por

$$\omega_f(\mathbf{x}) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(B_\delta(\mathbf{x}) \cap B_0).$$

Remark 3.6. *Definindo*

$$g_{\mathbf{x}}(\delta) = \omega_f(B_{\delta(\mathbf{x})} \cap B_0)$$

temos que $g_{\mathbf{x}}$ *é não-decrescente em* $\delta > 0$*, de modo que*

$$\begin{aligned} \omega_f(\mathbf{x}) &= \lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(B_\delta(\mathbf{x}) \cap B_0) \\ &= \lim_{\delta \to 0^+} g_{\mathbf{x}}(\delta), \end{aligned} \tag{16}$$

está bem definido como o limite lateral de uma função monótona quando

$$\delta \to 0^+.$$

Theorem 3.7. *Seja* $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ *um bloco compacto. Seja* $f : B_0 \to \mathbb{R}$ *tal que* $|f(\mathbf{x})| < K, \quad, \forall \mathbf{x} \in B_0$ *para algum* $K > 0$*. Seja* $\mathbf{x} \in B_0$*. Sob tais hipóteses,* f *é contínua em* $\mathbf{x}$ *se, e somente se,*

$$\omega_f(\mathbf{x}) = 0.$$

Proof. Suponha que f seja contínua em $\mathbf{x} \in B_0$. Seja $\varepsilon > 0$. Assim, existe $\delta_0 > 0$ tal que se $\mathbf{y} \in B_0$ and $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \delta_0$, então

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon/2.$$

Logo,

$$g_{\mathbf{x}}(\delta) = \sup\{|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})| \ : \ \mathbf{y},\ \mathbf{z} \in B_\delta(\mathbf{x}) \cap B_0\} \leq \varepsilon, \text{ se } 0 < \delta < \delta_0,$$

de modo que

$$\omega_f(\mathbf{x}) = \lim_{\delta \to 0^+} g_x(\delta) \leq \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos concluir que,

$$\omega_f(\mathbf{x}) = 0.$$

Reciprocamente, suponha que $\omega_f(\mathbf{x}) = 0$. Seja (um novo) $\varepsilon > 0$.

Assim, existe $\delta_0 > 0$ tal que se $0 < \delta < \delta_0$, então $g_{\mathbf{x}}(\delta) < \varepsilon$. Assim, para $\delta = \delta_0/2$ temos que $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon, \forall \mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}) \cap B_0$.

Podemos então concluir que

$$\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}} f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}),$$

de modo que f é contínua em $\mathbf{x}$.

A prova está completa. □

Theorem 3.8. *Seja* $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ *um bloco compacto. Seja* $f : B_0 \to \mathbb{R}$ *tal que* $|f(\mathbf{x})| < K$*,* $\forall \mathbf{x} \in B_0$ *para algum* $K > 0$*. Suponha que* f *é integrável à Riemann. Seja* $A \subset B_0$ *o conjunto onde* f *não é contínua. Sob tais hipóteses,* $m(A) = 0$*.*

Proof. Observe que $\mathbf{x} \in A$ se, e somente se, f não é contínua em $\mathbf{x}$. Em tal caso, do último teorema, $\omega_f(\mathbf{x}) > \frac{1}{m}$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$B_k = \left\{ \mathbf{x} \in B_0 \; : \; \omega_f(\mathbf{x}) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Logo

$$A = \cup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

Seja $k \in \mathbb{N}$. Provaremos que $m^*(B_k) = 0$.

De fato, seja $\varepsilon > 0$. Sendo f integrável à Riemann, existe uma partição P de B_0 tal que

$$S_f^P - s_f^P < \varepsilon.$$

Denotemos genericamente por B os blocos de P os quais interseccionam B_k e por B' os demais blocos.

Logo, para $B \in P$ temos que $B \cap B_k \neq \emptyset$, e assim

$$M_B - m_B > \frac{1}{k},$$

onde

$$M_B = \sup\{f(\mathbf{x}) \; : \; \mathbf{x} \in B\},$$

e

$$m_B = \inf\{f(\mathbf{x}) \; : \; \mathbf{x} \in B\}.$$

Por outro lado, para cada B' temos que $B' \cap B_k = \emptyset$ e

$$[\cup_{B \in P} B] \cup [\cup_{B' \in P} B'] = B_0 \supset B_k,$$

e portanto

$$\cup_{B \in P} B \supset B_k,$$

de modo que

$$\sum_{B \in P} Vol(B) = Vol(\cup_{B \in P} B) \geq m^*(B_k),$$

e assim

$$\begin{aligned} \varepsilon &> S_f^P - s_f^P \\ &\geq \sum_{B \in P} (M_B - m_B) Vol(B) \\ &> \frac{1}{k} \sum_{B \in P} Vol(B) \\ &\geq \frac{1}{k} m^*(B_k). \end{aligned} \tag{17}$$

Logo,

$$m^*(B_k) \leq k\varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, obtemos,

$$m^*(B_k) = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Finalmente,

$$m^*(A) = m^*(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(B_k) = 0,$$

de modo que

$$m(A) = m^*(A) = 0.$$

A prova está completa.

$\square$

4 Somas de Riemann

Definition 4.1. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto e seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função limitada.*

Seja P uma partição de B_0. Denotemos por B os sub-blocos de P.

Assim, definimos uma soma de Riemann de f relativa à P, denotada por R_f^P, por

$$R_f^P = \sum_{B \in P} f(\mathbf{x}_B) Vol(B),$$

para algum $\mathbf{x}_B \in B$, $\forall B \in P$.

Definition 4.2. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto e seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que I é o limite de R_f^P quando $|P| \to 0$, quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |P| < \delta$, então*

$$|R_f^P - I| < \varepsilon,$$

para toda soma de Riemann de f relativa à P.

Em tal caso, denotamos:

$$\lim_{|P| \to 0} R_f^P = I.$$

Theorem 4.3. *Seja $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ um bloco compacto e seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função limitada, isto é, assuma que existe $K > 0$ tal que*

$$|f(\mathbf{x})| < K, \ \forall \mathbf{x} \in B_0.$$

Suponha que f é integrável à Riemann.

Sob tais hipóteses,

$$\lim_{|P| \to 0} R_f^P = I = \int_{B_0} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Reciprocamente, suponha que existe $I \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{|P| \to 0} R_f^P = I.$$

Sob tais hipóteses, f é integrável à Riemann e

$$I = \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Proof. Assuma que f é integrável à Riemann. Seja $\varepsilon > 0$. Assim existe uma partição P de B_0 tal que

$$I - \frac{\varepsilon}{4} < s_f^P \leq S_f^P < I + \frac{\varepsilon}{4}.$$

onde

$$I = \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Escolha $\delta > 0$ tal que

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{4KA_1}, \frac{|P|}{2}, 1\right\},$$

onde A_1 denota a soma das áreas de todas as faces de todos os blocos de P. Seja P_1 uma partição de B_0 tal que $0 < |P_1| < \delta$.

Denotemos, genericamente, por B os blocos de P e por B' os blocos de P_1 Também, denotemos por B'_α os blocos de P_1 os quais estão totalmente contidos em algum bloco B de P, e por B'_β os demais blocos de P_1.

Assim,

$$\begin{aligned} S_f^P - s_f^P &= \sum_{B \in P} (M_B - m_B) Vol(B) \\ &\geq \sum_{B \in P} \left(\sum_{B'_\alpha \subset B} (M_{B'_\alpha} - m_{B'_\alpha}) Vol(B'_\alpha) \right) \\ &= \sum_{B'_\alpha \in P_1} (M_{B'_\alpha} - m_{B'_\alpha}) Vol(B'_\alpha), \end{aligned} \tag{18}$$

onde denotamos

$$M_B = \sup\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in B\},$$

$$m_B = \inf\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in B\},$$

$$M_{B_\alpha} = \sup\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in B_\alpha\},$$

$$m_{B_\alpha} = \inf\{f(\mathbf{x}) \ : \ \mathbf{x} \in B_\alpha\}.$$

Portanto, podemos escrever,

$$
\begin{aligned}
S_f^{P_1} - s_f^{P_1} &= \sum_{B'_\alpha \in P_1} (M_{B'_\alpha} - m_{B'_\alpha}) Vol(B'_\alpha) \\
&\quad + \sum_{B'_\beta \in P_1} (M_{B'_\beta} - m_{B'_\beta}) Vol(B'_\beta) \\
&\leq S_f^P - s_f^P + \sum_{B'_\beta \in P_1} 2K Vol(B'_\beta) \\
&\leq S_f^P - s_f^P + 2KA_1\delta \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$S_f^{P_1} - s_f^{P_1} < \varepsilon.$$

Finalmente, observe que,

$$s_f^{P_1} \leq R_f^{P_1} \leq S_f^{P_1},$$

e

$$-S_f^{P_1} \leq -I \leq -s_f^{P_1},$$

de modo que

$$-S_f^{P_1} + s_f^{P_1} \leq R_f^{P_1} - I \leq S_f^{P_1} - s_f^{P_1},$$

e assim,

$$|R_f^{P_1} - I| < S_f^{P_1} - s_f^{P_1} < \varepsilon, \forall \text{ partitição } P_1 \text{ tal que } |P_1| < \delta.$$

Portanto, podemos escrever

$$\lim_{|P_1| \to 0} R_f^{P_1} = I = \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Reciprocamente, suponha que

$$\lim_{|P| \to 0} R_f^P = I.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Assim existe $\delta > 0$ tal que se $|P| < \delta$, então

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < R_f^P < I + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (20)$$

para cada soma de Riemann relativa a P.

Escolha P tal que $|P| < \delta$. Observe que s_f^P e S_f^P são arbitrariamente próximas de somas de Riemann, e assim de (20),

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s_f^P \leq \underline{I_1} \leq \overline{I_1} \leq S_f^P < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

onde

$$\underline{I_1} = \sup\{s_f^P \ : \ P \text{ é partição de } B_0\},$$

e

$$\overline{I_1} = \inf\{S_f^P \ : \ P \text{ é partição de } B_0\},$$

Portanto, obtivemos,

$$\overline{I_1} - \underline{I_1} \leq \varepsilon,$$

e sendo $\varepsilon > 0$ aribitrário, conclui-se que

$$\underline{I_1} = \overline{I_1} \equiv I_1 = \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

isto é, f é integrável à Riemann.

Disto e do exposto acima,

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < I_1 < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

isto é,

$$|I - I_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, conclui-se que

$$I = I_1 = \int_{B_0} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

A prova está completa. $\square$

5 Aplicações, integração no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Nessa seção, desenvolveremos em detalhes a integração no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

5.1 Integração dupla iterada

Proposition 5.1. *Seja $B_0 = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ um bloco compacto, onde $a < b$ e $c < d$.*

Seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função limitada em B_0.

Seja $P = P_1 \times P_2$ uma partição de B_0, onde

$$P_1 = \{x_0 = a, x_1, ..., x_{m_1} = b\},$$

e

$$P_2 = \{y_0 = c, y_1, ..., y_{m_2} = d\}.$$

Selecionemos

$$y_j^* \in [y_{j-1}, y_j], \ \forall j \in \{1, ..., m_2\},$$

e denotemos

$$B_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

$$m_{ij} = \inf\{f(x,y) \ : \ (x,y) \in B_{ij}\},$$

$$\tilde{m}_{ij} = \inf\{f(x,y_j^*) \ : \ (x,y_j^*) \in B_{ij}\},$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x,y) \ : \ (x,y) \in B_{ij}\},$$

$$\tilde{M}_{ij} = \sup\{f(x,y_j^*) \ : \ (x,y_j^*) \in B_{ij}\},$$

e,

$$s_f^{P_1\times P_2} = \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} m_{ij} A(B_{i,j}),$$

$$\tilde{s}_f^{P_1\times P_2} = \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} \tilde{m}_{ij} A(B_{ij}),$$

$$S_f^{P_1\times P_2} = \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} M_{ij} A(B_{ij}),$$

$$\tilde{S}_f^{P_1\times P_2} = \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} \tilde{M}_{ij} A(B_{ij}),$$

e finalmente,

$$A(B_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \ \forall i \in \{1,...,m_1\}, \ \forall j \in \{1,...,m_2\}.$$

Sob tais hipóteses e notação,

$$s_f^{P_1\times P_2} \leq \tilde{s}_f^{P_1\times P_2} \leq \tilde{S}_f^{P_1\times P_2} \leq S_f^{P_1\times P_2}, \tag{21}$$

Proof. Claramente

$$m_{ij} \leq \tilde{m}_{ij} \leq \tilde{M}_{ij} \leq M_{ij},$$

de onde segue-se o resultado. □

Remark 5.2. *Já provamos anteriormente que*

$$s_f^P \leq S_f^Q, \ \forall \ P, Q \ \ \text{partições de } B_0.$$

Em particular, considerando as últimas definições e proposição, se P_a e P_b são partições de $[a,b]$, e P_2 é uma partição de $[c,d]$, então $P = P_a \times P_2$ e $Q = P_a \times P_2$ são partições de $B_0 = [a,b]\times[c,d]$ de modo que,

$$s_f^{P_a\times P_2} \leq S_f^{P_b\times P_2}.$$

Logo, disto e (21), obtemos,

$$
\begin{aligned}
s_f^{P_1\times P_2} &\leq \tilde{s}_f^{P_1\times P_2} \\
&\leq \sup_{P_1} \tilde{s}_f^{P_1\times P_2} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m_2} \underline{\int_a^b} f(x,y_j^*)\, dx\Delta y_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{m_2} \overline{\int_a^b} f(x,y_j^*)\, dx\Delta y_j \\
&= \inf_{P_1} \tilde{S}_f^{P_1\times P_2} \\
&\leq \tilde{S}_f^{P_1\times P_2} \\
&\leq S_f^{P_1\times P_2}. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Theorem 5.3. *Seja $f : B_0 = [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde $a < b$ e $c < d$.*
Sob tais hipóteses

$$
\begin{aligned}
\int\int_{B_0} f(x,y)\, dxdy &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right]\, dy \\
&= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right]\, dx. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Proof. Seja $\varepsilon > 0$.

Assim, existe uma partição $P = P_1 \times P_2$ de B_0 tal que

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s_f^{P_1\times P_2} \leq S_f^{P_1\times P_2} \leq I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Denotemos

$$P_2 = \{y_0 = c, y_1, ..., y_{m_2} = d\},$$

e escolha

$$y_j^* \in [y_{j-1}, y_j],\ \forall j \in \{1, ..., m_2\}.$$

Denotemos também,

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\, dy.$$

Observe que $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ é contínua, de modo que

$$\begin{aligned}
I - \frac{\varepsilon}{2} &\leq s_f^{P_1 \times P_2} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m_2} \underline{\int_a^b} f(x, y_j^*)\ dx \Delta y_j \\
&\leq \sum_{j=1}^{m_2} \overline{\int_a^b} f(x, y_j^*)\ dx \Delta y_j \\
&\leq S_f^{P_1 \times P_2} \\
&\leq I + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Disto, obtemos

$$\left| \sum_{j=1}^{m_2} \overline{\int_a^b} f(x, y_j^*)\ dx \Delta y_j - \sum_{j=1}^{m_2} \underline{\int_a^b} f(x, y_j^*)\ dx \Delta y_j \right| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$$\sum_{j=1}^{m_2} \overline{\int_a^b} f(x, y_j^*)\ dx \Delta y_j = \sum_{j=1}^{m_2} \underline{\int_a^b} f(x, y_j^*)\ dx \Delta y_j \equiv \sum_{j=1}^{m_2} \int_a^b f(x, y_j^*)\ dx \Delta y_j \equiv R_g^{P_2}.$$

Obtivemos então

$$|I - R_g^{P_2}| < \varepsilon,$$

e como $\{y_j^*\}$ é arbitrário, obtemos

$$|I - s_g^{P_2}| < \varepsilon$$

and

$$|I - S_g^{P_2}| < \varepsilon,$$

de modo que,

$$I - \varepsilon \leq s_g^{P_2} \leq \int_c^d g(y)\ dy \leq S_g^{P_2} \leq I + \varepsilon,$$

e assim

$$\left| I - \int_c^d g(y)\ dy \right| < \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, conclui-se que

$$I = \int\int_{B_0} f(x, y)\ dxdy = \int_c^d g(y)\ dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\ dx \right]\ dy.$$

Similarmente, podemos provar que

$$I = \int\int_{B_0} f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right]\, dx.$$

The prova está completa. □

5.2 Integração em regiões mais gerais

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, onde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b \text{ e } y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

e onde y_1 and $y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções suaves por partes, tais que

$$m(\partial D) = 0,$$

isto é, a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^2$ da fronteira ∂D de D é zero.

Seja $[c,d] \subset \mathbb{R}$ tal que

$$D \subset [a,b] \times [c,d] \equiv B_0.$$

Defina $\tilde{f} : B_0 \to \mathbb{R}$, by

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) = B_0 \setminus D. \end{cases} \tag{25}$$

Assim, o conjunto de descontinuidades de $\tilde{f}$ está contido em ∂D, onde

$$m(\partial D) = 0.$$

Podemos concluir que $\tilde{f}$ é integrável à Riemann, de modo que, do exposto na última seção, podemos definir

$$\begin{aligned} I &= \int\int_D f(x,y)\, dxdy \\ &\equiv \int\int_{B_0} \tilde{f}(x,y)\, dxdy \\ &= \int_a^b \left[\underline{\int}_c^d \tilde{f}(x,y)\, dy\right]\, dx \\ &= \int_a^b \left[\underline{\int}_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)\, dy\right]\, dx \\ &= \int_a^b \left[\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)\, dy\right]\, dx. \end{aligned} \tag{26}$$

5.3 Mudança de Variáveis na Integral Dupla

Considere a integral

$$I = \int\int_D f(x,y)\,dxdy,$$

onde D é uma região simples do $\mathbb{R}^2$.

Considere também funções de classe $C^1(D_0)$ denotadas por $X : D_0 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $Y : D_0 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e a mudança de variáveis dada por:

$$x = X(u,v),$$

e

$$y = Y(u,v), \forall (u,v) \in D_0.$$

Denotemos,

$$\mathbf{r}(u,v) = (X(u,v), Y(u,v)),$$

onde assumimos $\mathbf{r} : D_0 \to D$ ser uma bijeção e

$$f(X(u,v), Y(u,v)) = g(u,v).$$

Sejam $u, v \in D_0$. Considere a área elementar $\Delta\tilde{A} = (u, u+\Delta u) \times (v, v+\Delta v)$, cuja medida é

$$\Delta\tilde{A}(u,v) = \Delta u \Delta v.$$

Denotemos $\Delta A = \mathbf{r}(\Delta\tilde{A})$.

Observe que

$$\Delta r_u = \mathbf{r}(u+\Delta u, v) - \mathbf{r}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u}\Delta u + o(\Delta u) \approx \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u}\Delta u,$$

e

$$\Delta r_v = \mathbf{r}(u, v+\Delta v) - \mathbf{r}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\Delta v + o(\Delta v) \approx \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}\Delta v,$$

de modo que, denotando

$$\Delta A(u,v) = m(\Delta A),$$

temos que

$$\Delta A(u,v) \approx |\Delta\tilde{r}_u \times \Delta\tilde{r}_v|,$$

onde

$$\Delta\tilde{r}_u = (\Delta r_u, 0) \in \mathbb{R}^3,$$

e

$$\Delta\tilde{r}_v = (\Delta r_v, 0) \in \mathbb{R}^3,$$

de modo que

$$\Delta\tilde{r}_u = (X_u, Y_u, 0)\Delta u,$$

e

$$\Delta\tilde{r}_v = (X_v, Y_v, 0)\Delta v.$$

Assim,

$$\Delta\tilde{r}_u \times \Delta\tilde{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_u & Y_u & 0 \\ X_v & Y_v & 0 \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \tag{27}$$

e portanto

$$\Delta\tilde{r}_u \times \Delta\tilde{r}_v = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (X_uY_v - X_vY_u)\Delta u\Delta v\mathbf{k},$$

de modo que

$$\Delta A(u,v) \approx |\Delta\tilde{r}_u \times \Delta\tilde{r}_v| = |X_uY_v - X_vY_u)|\Delta u\Delta v,$$

ou na forma diferencial

$$dA(u,v) = |X_uY_v - X_vY_u)|dudv = |J(u,v)|\; dudv,$$

onde o Jacobiano $J(u,v) = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} X_u & Y_u \\ X_v & Y_v \end{vmatrix} = X_uY_v - X_vY_u$.

Finalmente, podemos concluir que

$$\begin{aligned} I &= \int\int_D f(x,y)\; dxdy \\ &= \int\int_{D_0} f(X(u,v), Y(u,v))\; dA(u,v) \\ &= \int\int_{D_0} f(X(u,v), Y(u,v))|J(u,v)|\; dudv. \end{aligned} \tag{28}$$

6 Integração no $\mathbb{R}^3$

Seja $B_0 = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ um bloco compacto em $\mathbb{R}^3$.

Seja $f : B_0 \to \mathbb{R}$ uma função contínua em B_0.

Sob tais hipóteses, similarmente ao caso do $\mathbb{R}^2$, podemos mostrar que

$$\int\int\int_{B_0} f(x,y,z)\; dxdydz = \int_e^f \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y,z)\; dx\right]\; dy\right]\; dz,$$

e em particular

$$\int\int\int_{B_0} f(x,y,z)\; dxdydz = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^f f(x,y,z)\; dz\right]\; dy\right]\; dx.$$

6.1 Integral tripla em domínios mais gerais

Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto limitado, simplismente conexo, tal que existem funções de classe C^1 $z_1, z_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e tais que D é uma região simples do $\mathbb{R}^2$, isto é, existem funções contínuas e suaves por partes $y_1, y_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \text{ e } a \leq x \leq b\},$$

de modo que

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \text{ e } (x, y) \in D\},$$

isto é,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), \ y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \ a \leq x \leq b\},$$

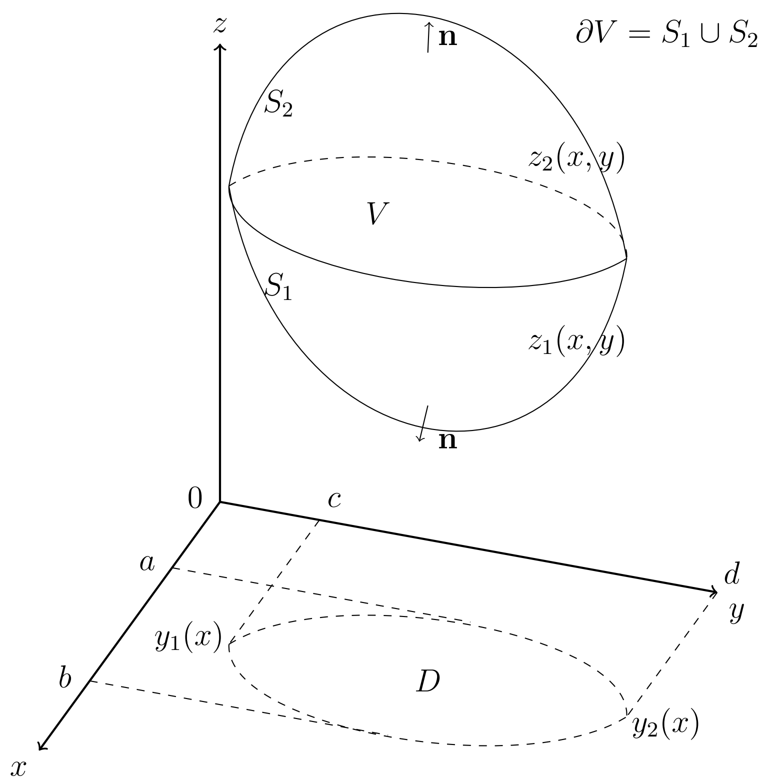

Figure 1: Uma região simples V no $\mathbb{R}^3$.

Observe que $m(\partial V) = 0$.

Também, sendo V limitado, existe um bloco compacto $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ tal que

$$V \subset B_0 \subset \mathbb{R}^3.$$

Defina $\tilde{f} : B_0 \to \mathbb{R}$, por

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in V \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = B_0 \setminus V. \end{cases} \tag{29}$$

Assim, o conjunto das descontinuidades de $\tilde{f}$ está contido em ∂V, o qual é tal que

$$m(\partial V) = 0.$$

Podemos concluir que $\tilde{f}$ é integrável à Riemann, de modo que do exposto na última seção podemos também definir:

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_V f(x,y,z)\, dxdydz \\ &\equiv \int\int\int_{B_0} \tilde{f}(x,y,z)\, dxdydz \\ &= \int_a^b \left[\underline{\int}_c^d \left[\underline{\int}_e^f \tilde{f}(x,y,z)\, dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\underline{\int}_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \left[\underline{\int}_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \left[\int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dy \right] dx. \end{aligned} \tag{30}$$

6.2 Mudança de variáveis na integral tripla

Considere a integral

$$I = \int\int\int_V f(x,y,z)\, dxdydz,$$

onde V é uma região simples do $\mathbb{R}^3$.

Considere também funções de classe $C^1(V_0)$ denotadas por $X : V_0 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Y : V_0 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $Z : V_0 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, e a mudança de variáveis definida por:

$$x = X(u,v,w), \;\; y = Y(u,v,w), \;\; z = Z(u,v,w), \; \forall (u,v,w) \in V_0,$$

onde assumimos que

$$\mathbf{r} : V_0 \to V$$

é uma bijeção e onde também denotamos,

$$\mathbf{r}(u,v,w) = (X(u,v,w), Y(u,v,w), Z(u,v,w)).$$

Seja $(u,v,w) \in V_0$. Considere o volume elementar $\Delta\tilde{V} = (u, u+\Delta u) \times (v, v+\Delta v) \times (w, w+\Delta w)$, o qual tem medida

$$\Delta\tilde{V}(u,v,w) = \Delta u \Delta v \Delta w.$$

Denotemos $\Delta V = \mathbf{r}(\Delta\tilde{V})$.

Observe que

$$\begin{aligned}\Delta r_u &= \mathbf{r}(u+\Delta u, v, w) - \mathbf{r}(u, v, w)\\ &= \frac{\partial\mathbf{r}(u,v,w)}{\partial u}\Delta u + o(\Delta u)\\ &\approx \frac{\partial\mathbf{r}(u,v,w)}{\partial u}\Delta u,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\Delta r_v &= \mathbf{r}(u, v+\Delta v, w) - \mathbf{r}(u, v, w)\\ &= \frac{\partial\mathbf{r}(u,v,w)}{\partial v}\Delta v + o(\Delta v)\\ &\approx \frac{\partial\mathbf{r}(u,v,w)}{\partial v}\Delta v,\end{aligned} \tag{32}$$

and,

$$\begin{aligned}\Delta r_w &= \mathbf{r}(u, v, w+\Delta w) - \mathbf{r}(u, v, w)\\ &= \frac{\partial\mathbf{r}(u,v,w)}{\partial w}\Delta w + o(\Delta w)\\ &\approx \frac{\partial\mathbf{r}(u,v,w)}{\partial w}\Delta w,\end{aligned} \tag{33}$$

de modo que, denotando

$$\Delta V(u,v,w) = m(\Delta V),$$

temos que

$$\Delta V(u,v,w) \approx |\Delta r_u \cdot (\Delta r_v \times \Delta r_w)|,$$

onde,

$$\Delta r_u = (X_u, Y_u, Z_u)\Delta u,$$

$$\Delta r_v = (X_v, Y_v, Z_v)\Delta v.$$

e

$$\Delta r_v = (X_w, Y_w, Z_w)\Delta w.$$

Assim,

$$(\Delta r_u \cdot (\Delta r_v \times \Delta r_w)) = \begin{vmatrix} X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \\ X_w & Y_w & Z_w \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \Delta w \tag{34}$$

e portanto,

$$\Delta V(u,v,w) \approx |J(u,v,w)|\Delta u \Delta v \Delta w,$$

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \\ X_w & Y_w & Z_w \end{vmatrix} \tag{35}$$

ou na forma diferencial,

$$dV(u,v,w) = |J(u,v,w)|\, dudvdw.$$

Finalmente, podemos escrever

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_V f(x,y,z)\, dxdydz \\
&= \int\int\int_{V_0} f(X(u,v,w),Y(u,v,w),Z(u,v,w))\, dV(u,v,w) \\
&= \int\int\int_{V_0} f(X(u,v,w),Y(u,v,w),Z(u,v,w))|J(u,v,w)|\, dudvdw. \qquad (36)
\end{aligned}$$

6.3 Integração no $\mathbb{R}^3$ em coordenadas cilíndricas

Para o sistema cartesiano de cooodenadas $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, considere a mudança de variáveis definida por,

$$x = X(r,\theta,z) = r\cos(\theta),$$

$$y = Y(r,\theta,z) = r\sin(\theta),$$

$$z = Z(r,\theta,z) = z.$$

Logo, (r,θ,z) são as coordenadas cilíndricas asociadas com (x,y,z).

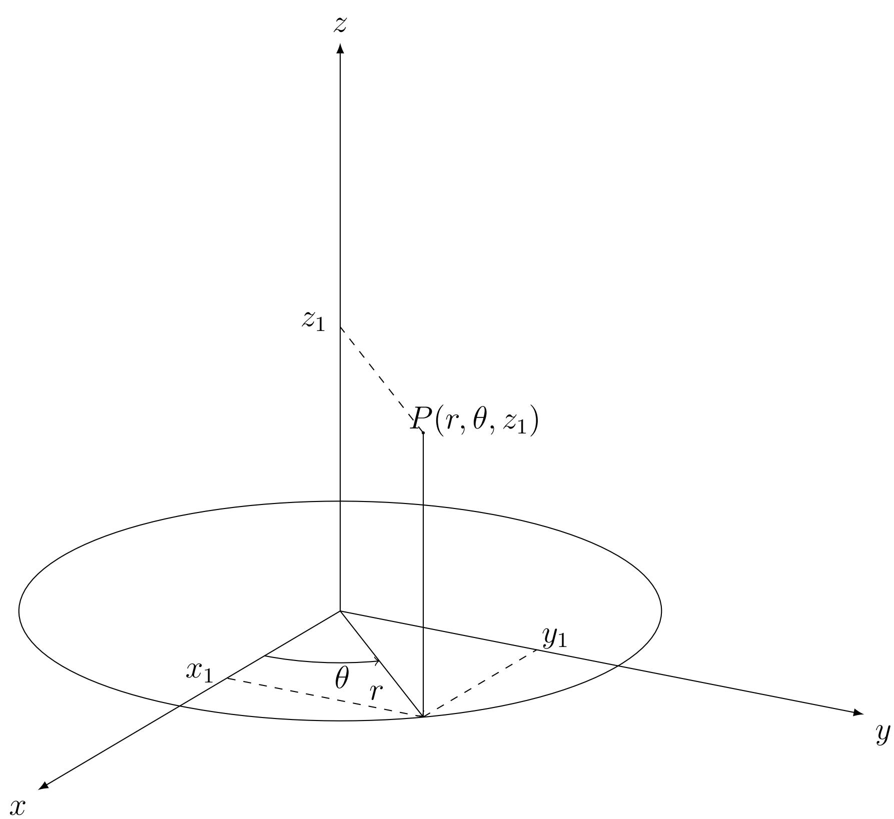

Figure 2: Coordenadas cilíndricas (r, θ, z_1) para o ponto $P(x_1 = r\cos(\theta), y_1 = r\sin(\theta), z_1) \in \mathbb{R}^3$.

Observe que

$$r^2[\cos(\theta)]^2 + r^2[\sin(\theta)]^2 = x^2 + y^2,$$

de modo que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Também,

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

e assim

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Observe também que

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} X_r & Y_r & Z_r \\ X_\theta & Y_\theta & Z_\theta \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix} \tag{37}$$

e portanto,

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \tag{38}$$

isto é,

$$J(r, \theta, z) = r$$

Assim, em coordenadas cilíndricas, temos que

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \int\int\int_{V_0} f(X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w))\, dV(u, v, w) \\ &= \int\int\int_{V_0} f(X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w))|J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw \\ &= \int\int\int_{V_0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\, r\, dr\, d\theta\, dz. \end{aligned} \tag{39}$$

6.4 Integração no $\mathbb{R}^3$ em coordenadas esféricas

Para as coordenadas cartesianas de um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, considere a mudança de variáveis definida por,

$$x = X(r, \theta, \phi) = r\sin(\theta)\cos(\phi),$$

$$y = Y(r, \theta, \phi) = r\sin(\theta)\sin(\phi),$$

$$z = Z(r, \theta, \phi) = r\cos(\theta).$$

Assim, (r, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas associadas ao ponto $P = (x, y, z)$, onde $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

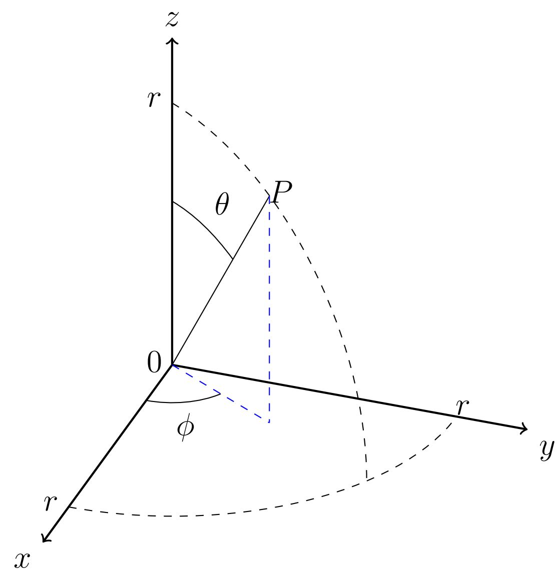

Figure 3: Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ).

Observe que

$$r^2 = r^2[\sin(\theta)]^2[\cos(\theta)]^2 + r^2[\sin(\theta)]^2[\sin(\phi)]^2 + r^2[\cos(\theta)]^2 = x^2 + y^2 + y^2,$$

de modo que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Também,

$$\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \tan(\phi) = \frac{y}{x},$$

de modo que,

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

e $\cos(\theta) = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ e assim

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Observe que

$$J(r, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} X_r & Y_r & Z_r \\ X_\theta & Y_\theta & Z_\theta \\ X_\phi & Y_\phi & Z_\phi \end{vmatrix} \tag{40}$$

e portanto,

$$J(r,\theta,\phi) = \begin{vmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi) \\ r\cos(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) & 0 \end{vmatrix} \tag{41}$$

isto é,

$$J(r,\theta,z) = r^2\sin(\theta)$$

Assim, em coordenads esféricas, temos que

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int\int\int_{V_0} f(X(u,v,w),Y(u,v,w),Z(u,v,w))\,dV(u,v,w) \\ &= \int\int\int_{V_0} f(X(u,v,w),Y(u,v,w),Z(u,v,w))|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw \\ &= \int\int\int_{V_0} f(r\sin(\theta)\cos(\phi),r\sin(\theta)\sin(\phi),r\cos(\theta))\,r^2\,\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi. \end{aligned}$$

7 Tópicos de Cálculo Vetorial

7.1 Curvas no $\mathbb{R}^3$

Definition 7.1 (Curva no $\mathbb{R}^3$)**.** *Uma curva suave no $\mathbb{R}^3$ é definida como o gráfico de uma função vetorial a uma variável*

$$\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3,$$

onde

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

é tal que x', y' e z' são contínuas em $[a,b]$.

Definition 7.2 (Curva suave por partes)**.** *Seja $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ uma função contínua em $[a,b]$. Assuma que existe uma partição $P = \{t_0 = a, t_1, .., t_m = b\}$ de $[a,b]$, tal que $\mathbf{r}'(t)$ é contínua em (t_{i-1}, t_i), $\forall i \in \{1, ..., m\}$. Além disso, assuma que $\mathbf{r}'(a+)$, $\mathbf{r}'(b-)$ existam e $\mathbf{r}'(t\pm)$ exista em (a,b). Em tal caso dizemos que $\mathbf{r}$ é uma função vectorial de uma variável suave por partes cujo gráfico define uma curva suave por partes.*

Finalmente, denotamos,

$$\mathbf{r}'(a+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{r}(a+h)-\mathbf{r}(t)}{h},$$

$$\mathbf{r}'(b-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\mathbf{r}(b+h)-\mathbf{r}(b)}{h},$$

$$\mathbf{r}'(t+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h},\ \forall t \in (a,b),$$

$$\mathbf{r}'(t-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}, \ \forall t \in (a,b).$$

Remark 7.3. *Similarmente podemos definir uma curva suave partes no $\mathbb{R}^n$, apenas substituindo $\mathbb{R}^3$ por $\mathbb{R}^n$ na última definição.*

7.2 Integrais de linha

Definition 7.4 (Integral de linha)**.** *Seja $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função vetorial contínua e seja C uma curva suave por partes, definida por $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Definimos a integral de linha de $\mathbf{F}$ sobre C, denotada por by

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

por

$$I = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \ dt.$$

Exemplo: Seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

e $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k},$$

de modo que

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

onde

$$x(t) = t^3, \ y(t) = t \text{ and } z(t) = t^2.$$

Assim

$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) \ dt = 3t^2 \ dt\mathbf{i} + dt\mathbf{j} + 2t \ dt\mathbf{k},$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
I &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\
&= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\ dt\\
&= \int_0^1 \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\ dt\\
&= \int_0^1 [(t^3)^2\mathbf{i}+t^3\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}]\cdot[3t^2\ dt\mathbf{i}+dt\mathbf{j}+2t\ dt\mathbf{k}]\\
&= \int_0^1 [3t^8+t^3+2t^3]\ dt\\
&= [3t^9/9+t^4/4+2t^4/4]_0^1\\
&= 3/9+1/4+2/4\\
&= 1/3+1/4+1/2\\
&= (4+3+6)/12\\
&= 13/12. \qquad (42)
\end{aligned}
$$

7.3 Teorema de Green no plano

Definition 7.5 (Conjuntos conexos no $\mathbb{R}^n$)**.** *Um conjunto aberto $V\subset\mathbb{R}^n$ é dito ser conexo (por caminhos) se para cada $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}\in V$ tais que $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$, existe uma função vetorial de uma variável suave por partes $\mathbf{r}:[a,b]\to V$ tal que $\mathbf{r}(a)=\mathbf{A}$ e $\mathbf{r}(b)=\mathbf{B}$.*

Um conjunto aberto $V\subset\mathbb{R}^n$ é dito ser simplesmente conexo quando é conexo e para cada curva fechada suave partes C tal que $C\subset V$, temos que a região interior a C está toda contida em V.

Se $V\subset\mathbb{R}^n$ é conexo mas não é simplesmente conexo, é dito ser multiplamente conexo.

Theorem 7.6 (Teorema de Green no plano)**.** *Seja $D\subset\mathbb{R}^2$ uma região simples do plano e sejam $P,Q:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funções de classe C^1 em $\overline{D}$, isto é, funções contínuas em $\overline{D}$ e com derivadas de primeira ordem contínuas em D.*

Sob tais hipóteses,

$$\int\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\ dx\ dy=\oint_{\partial D}P\ dx+Q\ dy,$$

onde a integral de linha na curva fechada em questão é considerada no sentido anti-horário.

Proof. Observe que

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ a\le x\le b \text{ e } y_1(x)\le y\le y_2(x)\}.$$

Denotemos $\partial D=\partial D_1\cup\partial D_2$, onde ∂D_1 corresponde a parte da fronteira relativa à y_1 e ∂D_2 corresponde à parte da fronteira relativa à y_2.

Defina,

$$I_1 = \int \int_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{x=a}^{x=b} \left[\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy \right] dx \\
&= \int_{x=a}^{x=b} [P(x,y)]_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}\, dx \\
&= \int_a^b P(x, y_2(x))\, dx - \int_a^b P(x, y_1(x))\, dx \\
&= -\int_{\partial D_2} P\, dx - \int_{\partial D_1} P\, dx \\
&= -\oint_{\partial D_1 \cup \partial D_2} P\, dx \\
&= -\oint_{\partial D} P\, dx. \qquad (43)
\end{aligned}$$

Resumindo,

$$I_1 = \int \int_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\oint_{\partial D} P\, dx.$$

Similarmente, podemos mostrar que

$$\int \int_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_{\partial D} Q\, dy,$$

de modo que

$$\int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

□

A prova está completa.

7.4 Formas diferenciais exatas

Definition 7.7. *Sejam $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3$ funções contínuas, onde D é um conjunto aberto.*

Dizemos que a forma diferencial

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

é exata, se existe uma função $U : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y} \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Nesse caso denotamos,

$$\begin{aligned} dU &= P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \frac{\partial U}{dx}\,dx + \frac{\partial U}{dy}\,dy + \frac{\partial U}{dz}\,dz. \end{aligned} \tag{44}$$

Também, a função U em questão é dita ser um potencial associado ao campo vetorial

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

Theorem 7.8. *Sejam $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$ funções contínuas, onde D é um conjunto aberto e conexo. Sob tais hipóteses, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *A forma $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ é exata.*
2. *A integral de linha*
$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$
onde C conecta os pontos extremos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \in D$ depende apenas dos pontos inicial $\mathbf{A}$ e final $\mathbf{B}$, mas não da curva suave por partes C que os conecta.
3. *Temos que*
$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$
para toda curva fechada suave por partes C contida em D.

Proof.

- 1 implica 2:

Suponha que existe $U : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y} \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \in D$. Seja C uma curva suave por partes conectando $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Suponha quet C é definida por $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ onde,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

e onde $\mathbf{r}(a) = \mathbf{A}$ e $\mathbf{r}(b) = \mathbf{B}$.

Sejam $t_1, t_2, .., t_{m-1}$ os pontos onde $\mathbf{r}'$ não é contínua e denotemos também $t_0 = a$, $t_m = b$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_C P\ dx + Q\ dy + R\ dz \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\ dx + \frac{\partial U}{\partial y}\ dy + \frac{\partial U}{\partial z}\ dz \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial x}\ x'(t)\ dt + \frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial y}\ y'(t)\ dt + \frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial z}\ z'(t)\ dt \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dU(\mathbf{r}(t))}{dt}\ dt \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} [U(\mathbf{r}(t))]_{t_i}^{t_{i+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} U(\mathbf{r}(t_{i+1})) - U(\mathbf{r}(t_i)) \\
&= U(\mathbf{r}(b)) - U(\mathbf{r}(a)) \\
&= U(\mathbf{B}) - U(\mathbf{A}). \qquad (45)
\end{aligned}
$$

- 2 implica 1:

  Suponha que as integrais de linha em D da forma diferencial em questão, dependam apenas dos pontos inicial $\mathbf{A}$ e final $\mathbf{B}$, mas não da curva suave por partes conectando-os.

  Escolha $\mathbf{A} \in D$.

  Seja $\mathbf{P} \in D$. Como a integral em questão não depende da curva suave por partes conectando $\mathbf{A}$ e $\mathbf{P}$, podemos definir

  $$U(\mathbf{P}) = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{P}} P\ dx + Q\ dy + R\ dz.$$

  Assim, denotando $\mathbf{P} = (x, y, z)$ e $\mathbf{P}_1 = (x + \Delta x, y, z)$ obtemos,

  $$
  \begin{aligned}
  & \frac{U(\mathbf{P}_1) - U(\mathbf{P})}{\Delta x} \\
  = & \frac{\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{P}_1}(P\ dx + Q\ dy + R\ dz) - \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{P}}(P\ dx + Q\ dy + R\ dz)}{\Delta x} \\
  = & \frac{\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{P}}(P\ dx + Q\ dy + R\ dz) + \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{P_1}}(P\ dx + Q\ dy + R\ dz) - \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{P}}(P\ dx + Q\ dy + R\ dz)}{\Delta x} \\
  = & \frac{\int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{P_1}}(P\ dx + Q\ dy + R\ dz)}{\Delta x}. \qquad (46)
  \end{aligned}
  $$

  Como D é aberto, podemos considerar, para um Δx suficientemente pequeno, o caminho entre $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}_1$, definido por $\mathbf{r}_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, onde

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t) &= (1-t)\mathbf{P} + t\mathbf{P}_1 \\ &= (x + t\Delta x, y, z), \end{aligned} \tag{47}$$

de modo que, do teorema do valor médio para integrais, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{U(\mathbf{P}_1) - U(\mathbf{P})}{\Delta x} \\ = & \frac{\int_0^1 P(x + t\Delta x)\Delta x \, dt}{\Delta x} \\ = & P(x + \tilde{t}\Delta x), \end{aligned} \tag{48}$$

para algum $\tilde{t} \in (0, 1)$.

Portanto, fazendo $\Delta x \to 0$, obtemos,

$$\begin{aligned} & \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} \\ = & \frac{U(\mathbf{P}_1) - U(\mathbf{P})}{\Delta x} \\ = & P(x + \tilde{t}\Delta x) \to P(x), \text{ quando } \Delta x \to 0, \end{aligned} \tag{49}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} \\ &= P(x), \end{aligned} \tag{50}$$

Similarmente, podemos mostrar que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q,$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Conclui-se então que a forma diferencial em questão é exata.

- 2 implica 3:

  Suponha que

  $$I = \int_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz,$$

  dependa apenas dos pontos inicial $\mathbf{A}$ e final $\mathbf{B}$ mas não da curva suave por partes C conectando $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

  Seja C uma curva fechada suave por partes contida em D. Escolha $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \in C$, de modo que $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

Observe que podemos denotar

$$C = C_1 \cup (-C_2)$$

onde C_1 é uma parte de C conectando $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e $-C_2$ é a outra parte de C, de $\mathbf{B}$ para $\mathbf{A}$.

Das hipóteses

$$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
& \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\
= & \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{-C_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\
= & \int_{C_1 \cup (-C_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\
= & \int_{C} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\
= & \; 0 \qquad (51)
\end{aligned}$$

- 3 implica 2:

  Suponha agora que

  $$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

  para toda curva fechada suave por partes.

  Escolha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$.

  Sejam C_1 e C_2 duas funções suaves por partes conectando $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

  Logo,

  $$C = C_1 \cup (-C_2),$$

  é curva fechada suave por partes.

  Da hipótese,

  $$\oint_{C_1 \cup (-C_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

  isto é,

  $$\begin{aligned}
  & \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{-C_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\
  = & \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \qquad (52)
  \end{aligned}$$

  de modo que

  $$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

ou seja, a integral não depende da curva suave por partes conectando **A** e **B**.

A prova está completa.

□

7.5 Integrais de Superfície

Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ definida pela equação $z = f(x,y)$, isto é,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D \text{ e } z = f(x,y)\},$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é uma região simples.

Assim, S é definida pela equação

$$z - f(x,y) = 0,$$

isto é, denotando

$$F(x,y,z) = z - f(x,y).$$

por

$$F(x,y,z) = 0.$$

Seja $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$, e seja C uma curva suave por partes em S a qual contém $\mathbf{x}_0$.

Assuma que C é definida por uma função de classe C^1 denotada por $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, onde

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Das hipóteses, como $C \subset S$ temos que,

$$F(\mathbf{r}(t)) = 0,$$

ou seja,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0, \forall t \in [a,b].$$

Observe que existe $t_0 \in [a,b]$ tal que

$$\mathbf{r}(t_0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k},$$

de modo que

$$F(\mathbf{r}(t_0)) = F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Por outro lado, como

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0, \forall t \in [a,b],$$

obtemos

$$\frac{dF(x(t), y(t), z(t))}{dt} = 0,$$

isto é,

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F(\mathbf{r}(t))}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F(\mathbf{r}(t))}{\partial z} z'(t) = 0,$$

de modo que em particular para $t = t_0$, obtemos

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}(t_0))}{\partial x} x'(t_0) + \frac{\partial F(\mathbf{r}(t_0))}{\partial y} y_0'(t) + \frac{\partial F(\mathbf{r}(t_0))}{\partial z} z'(t_0) = 0,$$

ou seja,

$$\nabla F(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

Assim, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$ a qual é uma direção tangente a C e, em particular, tangente a S em (x_0, y_0, z_0).

Sendo C uma curva arbitrária, concluiremos que $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ é ortogonal a qualquer direção tangente a S em (x_0, y_0, z_0), de modo que é ortogoanal ao plano tangente a S em (x_0, y_0, z_0).

Portanto, o plano tangente a S em (x_0, y_0, z_0) tem como direção normal o vetor

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \nabla F(x_0, y_0, z_0) \\ &= (-f_x(x_0, y_0, z_0), -f_y(x_0, y_0, z_0), 1), \end{aligned} \tag{53}$$

e o correspondente vetor normal unitário $\mathbf{n}$ será dado por:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}},$$

onde as funções em questão são consideradas em (x_0, y_0, z_0).

Seja γ o ângulo entre $\mathbf{n}$ e o eixo $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{n}||\mathbf{k}|} \\ &= \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \cdot (0, 0, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}, \end{aligned} \tag{54}$$

de modo que,

$$\cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}.$$

7.6 Áreas de superfícies

Considere o problema de calcular a área da superfícier S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\},$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é uma região simples.

O elemento de área ΔS na superfície, o qual aproximadamente corresponde ao retângulo no plano x-y definido por $(x, x + \Delta x) \times (y, y + \Delta y)$, de área elementar $\Delta x \Delta y$, é aproximadamente dado por

$$\Delta S \approx \frac{\Delta x \Delta y}{\cos \gamma}.$$

Na forma diferencial, podemos obter

$$dS = \frac{dx\ dy}{\cos(\gamma)} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\ dy.$$

Definiremos então, a área de S, denotada por $A(S)$, como

$$A(S) = \int \int_S dS = \int \int_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\ dy.$$

7.7 Equações paramétricas de uma superfície

Uma superfície S pode ser definida por

$$S = \{\mathbf{r}(u, v)\ :\ (u, v) \in D\}, \tag{55}$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$ e

$$\mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}.$$

Como exemplo, considere a esfera de raio $R > 0$ e superfície S, onde

$$x = R\sin(\theta)\cos(\phi),$$

$$y = R\sin(\theta)\sin(\phi),$$

e,

$$z = R\cos(\theta).$$

Assim,

$$S = \{\mathbf{r}(\theta, \phi)\ :\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi\},$$

isto é

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = X(\theta, \phi)\mathbf{i} + Y(\theta, \phi)\mathbf{j} + Z(\theta, \phi)\mathbf{k},$$

onde

$$X(\theta, \phi) = R\sin(\theta)\cos(\phi),$$

$$Y(\theta, \phi) = R\sin(\theta)\sin(\phi),$$

e

$$Z(\theta, \phi) = R\cos(\theta).$$

7.8 Cálculo da área mediante as equações paramétricas

Considere uma superfície

$$S = \{\mathbf{r}(u, v) \ : \ (u, v) \in D\},$$

onde $\mathbf{r}$ é de classe C^1 e $D \subset \mathbb{R}^2$ é uma região simples e onde,

$$\mathbf{r}(u, v) = X(u, v)\mathbf{i} + Y(u, v)\mathbf{j} + Z(u, v)\mathbf{k}.$$

Considere também o retângulo $(u, u + \Delta u) \times (v, v + \Delta v)$, de dimensões Δu e Δv.

Observe para Δu e Δv suficientemente pequenos, temos que,

$$\begin{aligned}
\Delta r_u &= \mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v) \\
&= \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u}\Delta u + o(\Delta u) \\
&\approx \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u}\Delta u, \qquad (56)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta r_v &= \mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v) \\
&= \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}\Delta v + o(\Delta v) \\
&\approx \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}\Delta v. \qquad (57)
\end{aligned}$$

Na superfície, a área correspondente a região planar $(u, u+\Delta u)\times(v, v+\Delta v)$ será aproximadamente

$$\Delta S \approx |\Delta r_u \times \Delta r_v|,$$

onde, conforme acima,

$$\Delta r_u \approx (X_u(u, v), Y_u(u, v), Z_u(u, v))\Delta u,$$

e

$$\Delta r_v \approx (X_v(u, v), Y_v(u, v), Z_v(u, v))\Delta v.$$

Portanto,

$$\Delta S \approx \left|\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}\right| \Delta u \Delta v.$$

Podemos então obter, na forma diferencial

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}\right| du dv.$$

Em particular para

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f(x, y) \text{ e } (x, y) \in D\},$$

podemos escrever

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

de modo que

$$\mathbf{r}_x(x,y) = (1,0,f_x(x,y)),$$
$$\mathbf{r}_y(x,y) = (0,1,f_y(x,y)),$$

e assim,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix}. \tag{58}$$

Observe que

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

de modo que

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}.$$

Finalmente, podemos re-obter,

$$\begin{aligned} A(S) &= \int\int_S dS \\ &= \int\int_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|\, dx\, dy \\ &= \int\int_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy. \end{aligned} \tag{59}$$

7.9 Teorema da Divergência

Definition 7.9 (Divergente)**.** *Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e seja $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1, onde*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}.$$

Definimos o divergente de $\mathbf{F}$, denotado por $div(\mathbf{F})$, como

$$div(\mathbf{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Definition 7.10 (Região simples no $\mathbb{R}^3$)**.** *Dizemos que $V \subset \mathbb{R}^3$ é uma região ou volume simples do $\mathbb{R}^3$ quando existem funções de classe C^1, denotadas por*

$$z_1, z_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$y_1, y_2 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

e

$$x_1, x_2 : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

onde D, D_1, D_2 são regiões simples do $\mathbb{R}^2$, tais que V admite concomitantemente, as seguintes representações

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \ e \ (x,y) \in D\},$$
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y_1(x,z) \leq y \leq y_2(x,z) \ e \ (x,z) \in D_1\},$$

and

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1(y,z) \leq x \leq x_2(y,z) \ e \ (y,z) \in D_2\}.$$

Theorem 7.11 (Teorema da divergência, Gauss)**.** *Seja* $\mathbf{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *um campo vetorial de classe* C^1*, onde* V *é uma região simples do* $\mathbb{R}^3$*.*

Sob tais hipóteses,

$$\int\int\int_V div(\mathbf{F}) \, dx \, dy \, dz = \int\int_{\partial V} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, dS,$$

onde ∂V *denota a fronteira de* V *e* $\mathbf{n}$ *a normal exterior unitária a* ∂V*.*

Proof. Observe que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial z} \, dxdydz \\ &= \int\int_D \left(\int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz \right) dxdy \\ &= \int\int_D [R(x,y,z)]_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} \, dxdy \\ &= \int\int_D (R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))) \, dxdy. \end{aligned} \tag{60}$$

Assim,

$$I_1 = \int\int_D \left(R(x,y,z_2(x,y)) \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\gamma)} - R(x,y,z_1(x,y)) \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\gamma)} \right) dxdy,$$

isto é,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\int_D \left(R(x,y,z_2(x,y)) \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\gamma)} + R(x,y,z_1(x,y)) \frac{\cos(\gamma)}{(-\cos(\gamma))} \right) dxdy \\ &= \int\int_{S_2} R\cos(\gamma) \, dS + \int\int_{S_1} R\cos(\gamma) \, dS, \end{aligned} \tag{61}$$

onde,

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = z_2(x,y) \text{ e } (x,y) \in D\},$$

e onde,

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = z_1(x,y) \text{ and } (x,y) \in D\}.$$

Observe que

$$dS = \frac{dxdy}{\cos(\gamma)}$$

em S_2 e

$$dS = \frac{dxdy}{-\cos(\gamma)}$$

em S_1.

Portanto,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\int_{S_1 \cup S_2} R\cos(\gamma)\; dS \\ &= \int\int_S R\cos(\gamma)\; dS. \end{aligned} \tag{62}$$

Similarmente, denotando por α e β os ângulos entre $\mathbf{n}$ e $\mathbf{i}$ e entre $\mathbf{n}$ e $\mathbf{j}$, respectivamente, podemos obter

$$I_2 = \int\int\int_V \frac{\partial P}{\partial x}\; dxdydz = \int\int_S P\cos(\alpha)\; dS,$$

e

$$I_3 = \int\int\int_V \frac{\partial Q}{\partial y}\; dxdydz = \int\int_S Q\cos(\beta)\; dS.$$

Resumindo, obtivemos

$$\begin{aligned} \int\int\int_V div(\mathbf{F})\; dx\; dy\; dz &= \int\int\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\; dxdydz \\ &= \int\int_S (P\cos(\alpha) + Q\cos(\beta) + R\cos(\gamma))\; dS \\ &= \int\int_S (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i} + \cos(\beta)\mathbf{j} + \cos(\gamma)\mathbf{k})\; dS \\ &= \int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; dS, \end{aligned} \tag{63}$$

onde, conforme acima indicado, $S = \partial V$ é a fronteira de V. A prova está completa. $\square$

7.10 O Teorema de Stokes no $\mathbb{R}^3$

Definition 7.12 (Rotacional)**.** *Seja* $\mathbf{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *um campo vetorial de classe* C^1*, onde* V *é um conjunto aberto.*

Definimos o rotacional de $\mathbf{F}$ *em* V*, denotado por* $rot\, \mathbf{F}$*, por*

$$rot\; \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \tag{64}$$

e onde temos denotado,

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

Assim,

$$rot\ \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

em V.

Theorem 7.13 (Teorema de Stokes)**.** *Seja* S *uma superfície tal que*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = z(x,y) \ e \ (x,y) \in D\},$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$ *é uma região simples e* $z : D \to \mathbb{R}$ *é de classe* C^1.

Denotemos por $\mathbf{n}$ *a normal exterior unitária à* S.

Seja $\mathbf{F} : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *um campo vetorial de classe* C^1, *onde* V *é aberto e* $S \subset V^\circ$.

Sob tais hipóteses,

$$\int\int_S (rot\ \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde C *é a fronteira de* S, *isto é,*

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = z(x,y) \ e \ (x,y) \in \partial D\},$$

onde ∂D *é a fronteira de* D.

Proof. Observe que em S, temos que $z = z(x,y)$, e assim, também em S,

$$dz = z_x\, dx + z_y\, dy,$$

de modo que

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \oint_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz \\ &= \oint_C P\, dx + Q\, dy + R(z_x\, dx + z_y\, dy), \end{aligned} \tag{65}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \oint_C (P + Rz_x)\, dx + (Q + Rz_y)\, dy \\ &= \oint_{\partial D} (P(x,y,z(x,y)) + R(x,y,z(x,y))z_x(x,y))\, dx \\ &\quad +(Q(x,y,z(x,y)) + R(x,y,z(x,y))z_y(x,y))\, dy \\ &= \oint_{\partial D} \tilde{P}\, dx + \tilde{Q}\, dy, \end{aligned} \tag{66}$$

onde

$$\tilde{P}(x,y) = P(x,y,z(x,y)) + R(x,y,z(x,y))z_x(x,y),$$

e

$$\tilde{Q}(x,y) = Q(x,y,z(x,y)) + R(x,y,z(x,y))z_y(x,y).$$

Do teorema de Green no plano, obtemos

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{\partial D} \tilde{P}\,dx + \tilde{Q}\,dy \\
&= \int\int_D \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \int\int_D [Q_x + Q_z z_x + (R_x + R_z z_x) z_y + R z_{yx}]\,dxdy \\
&\quad - \int\int_D [P_y + P_z z_y + (R_y + R_z z_y) z_x + R z_{xy}]\,dxdy \\
&= \int\int_D [(R_y - Q_z)(-z_x) + (P_z - R_x)(-z_y) + (Q_x - P_y)]\,dxdy \\
&= \int\int_D [(R_y - Q_z)\mathbf{i} + (P_z - R_x)\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\mathbf{k}] \cdot [-z_x\mathbf{i} - z_y\mathbf{j} + \mathbf{k}]\,dxdy \\
&= \int\int_D [rot\ \mathbf{F}] \cdot \frac{[-z_x\mathbf{i} - z_y\mathbf{j} + \mathbf{k}]}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\,dxdy \\
&= \int\int_S (rot\ \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS. \qquad (67)
\end{aligned}$$

A prova está completa. $\square$