Cálculo 1 - Primeira Aula- Conjuntos

Prof. Fabio Silva Botelho

July 27, 2017

1 Conjuntos

A idéia de conjunto refere-se à noção de coleção ou classe de objetos, não cabendo uma definição mais formal.

Indicamos um conjunto descrevendo uma propriedade especifica satisfeita por seus elementos, ou apresentando explicitamente os seus elementos.

Exemplo: Considere o conjunto A onde,

$$A = \{ \text{ Conjunto das vogais do alfabeto } \},$$

isto é,

$$A = \{a, e, i, o, u\}.$$

Se um elemento x pertence ao conjunto A, denotamos, $x \in A$. Se x não está em A, denotamos,

$$x \notin A.$$

Definition 1.1 (Conjunto Unitário)**.** *Um conjunto A com um único elemento é dito ser unitário.*

Exemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 2x + 1 = 8\}.$$

Observe que

$$2x + 1 = 8 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = 7/2.$$

Portanto,

$$A = \{7/2\}, \text{ (conjunto unitário)}.$$

Definition 1.2 (conjunto vazio)**.** *Se um conjunto A possui nenhum elemento, é dito ser vazio.*

Nesse caso denotamos,

$$A = \emptyset.$$

Exemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 = -1\}.$$

Assim $A = \emptyset$.

Definition 1.3 (Inclusão)**.** *Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A está contido em B quando a seguinte propiedade é satisfeita:*

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

onde lê-se: " se $x \in A$ então $x \in B$."

Exemplo:
$A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$.
Logo $A \subset B$.
Se $A \subset B$ e existe $x \in B$ tal que $x \notin A$, dizemos que a inclusão é própria.
Exemplo: Sejam

$$A = \{a, b\}, \quad B = \{a, b, c\}, \quad C = \{a, b, c\}.$$

Assim $A \subset B$ e como $c \in B$ e $c \notin A$ a inclusão é dita ser própria.
Observe que $B \subset C$ e $C \subset B$ mas tais inclusões não são próprias.
Se A não está contido em B, denotamos,

$$A \not\subset B.$$

Exemplo: Sejam

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{a, b, d, e\}.$$

Assim $A \not\subset B$ pois $c \in A$ e $c \notin B$.
Conjuntos Iguais:
Dois conjuntos A e B são ditos iguais quando $A \subset B$ e $B \subset A$.
Para $A \subset B$ lê-se A está contido em B, ou equivalentemente $B \supset A$, onde lê-se B contém A.

Definition 1.4 (Diferença entre conjuntos)**.** *Sejam $A, B \subset V$ onde V é um conjunto universo.*
Definimos a diferença A menos B, denotada por $A \setminus B$, por

$$A \setminus B = \{x \,:\, x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Exemplo: Sejam

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

e

$$B = \{4, 6, 7, 5\}.$$

Assim,

$$A \setminus B = \{1, 2, 3\},$$

e

$$B \setminus A = \{6, 7\}.$$

Definition 1.5 (Conjunto das partes)**.** *Seja A um conjunto. Definimos o conjunto das partes de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$ como o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A.*

Assim

$$\mathcal{P}(A) = \{X \ : \ X \subset A\}.$$

Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 3\}$.

assim

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Exercício: Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 7\}$.

Obtenha $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}(A \setminus B)$, $\mathcal{P}(B \setminus A)$.

$A \setminus B = \{1, 5\}$ e $B \setminus A = \{7\}$.

Logo,

$$\mathcal{P}(A \setminus B) = \{\emptyset, \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}\},$$

e

$$\mathcal{P}(B \setminus A) = \{\emptyset, \{7\}\}.$$

Exercício: Sejam

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 = 4\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^3 - 4x = 0\}.$$

Obtenha $A, B, A \setminus B, B \setminus A, \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)$.

A: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$, logo

$$A = \{-2, 2\}.$$

B: $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$ ou $x = 2$.

Assim

$$B = \{0, -2, 2\}.$$

Portanto,

$$A \setminus B = \emptyset,$$

$$B \setminus A = \{0\},$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{-2\}, \{2\}, \{-2, 2\}\},$$

e

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{-2\}, \{2\}, \{0, -2\}, \{0, 2\}, \{-2, 2\}, \{0, -2, 2\}\}.$$

2 União de conjuntos

Definition 2.1 (União)**.** *Dados dois conjuntos A e B, definimos a união entre A e B, denotada por $A \cup B$, por*

$$A \cup B = \{x \,:\, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Exemplo:
$A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d, e\}$.
Logo,

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}.$$

Propriedades da união:

Sejam A, B, C conjuntos. Assim,

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup \emptyset = A$.
3. $A \cup B = B \cup A$.
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

3 Intersecção entre conjuntos

Definition 3.1 (Intersecção de conjuntos)**.** *Dados dois conjuntos A e B, definimos a intersecção entre A e B, denotada por $A \cap B$, por*

$$A \cap B = \{x \,:\, x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Exemplo:
Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d, e\}$.
Assim, $A \cap B = \{b, c\}$.
Propriedades da Intersecção:
Sejam A, B, C conjuntos. Assim,

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap V = A$, onde V é o conjunto universo em questão.
3. $A \cap B = B \cap A$.
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Definition 3.2 (conjuntos disjuntos). *Sejam A e B conjuntos. Se $A \cap B = \emptyset$ dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.*

Exemplo: Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$. Assim $A \cap B = \emptyset$ isto é, A e B são disjuntos.

4 Propriedades da união e intersecção

Sejam A, B, C conjuntos. Assim,

1. $A \cup (A \cap B) = A$
2. $A \cap (A \cup B) = A$.
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.