Cálculo 1 - Décima Aula
Complementos sobre Funções, Logaritmos e as Primeiras Definições sobre Limites

Prof. Fabio Silva Botelho

August 17, 2017

1 Função Injetiva

Definition 1.1 (Função injetiva). *Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ é dita ser injetiva quando a seguinte propriedade é válida:*

$$\text{Se } x_1, x_2 \in A \text{ e } x_1 \neq x_2, \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2),$$

ou equivalentemente,

$$\text{Se } x_1, x_2 \in A \text{ e } f(x_1) = f(x_2), \text{ então } x_1 = x_2.$$

Exemplo:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = a \cdot x + b, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

onde

$$a \neq 0.$$

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, assim

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Rightarrow \quad & ax_1 + b = ax_2 + b \\ \Rightarrow \quad & ax_1 = ax_2 \\ \Rightarrow \quad & x_1 = x_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Portanto f é injetiva.

2 Função Sobrejetiva

Definition 2.1. *Uma função $f : A \to B$ é dita ser sobrejetiva quando*

$$Im(f) = B,$$

onde $Im(f)$ denota a imagem de f, isto é,

$$Im(f) = \{f(x) \ : \ x \in A\}.$$

Exemplo:
$f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, tal que

$$f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim $Im(f) = [0, +\infty)$ e portanto f é sobrejetiva.
Observação:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

não é sobrejetiva.

3 Função Bijetiva

Definition 3.1. *Uma função $f : A \to B$ é dita ser bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva.*
Nesse caso f adimite uma inversa $f^{-1} : B \to A$, definida por,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

ande $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.
Já vimos que f é injetiva. Mostraremos que f é sobrejetiva. Seja $y \in \mathbb{R}$.
Assim,

$$\begin{aligned} f(x_0) = y \quad &\Leftrightarrow \quad ax_0 + b = y \\ &\Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{y - b}{a}. \end{aligned} \tag{2}$$

Logo

$$f(x_0) = f\left(\frac{y - b}{a}\right) = y.$$

Portanto

$$y \in Im(f), \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Conclui-se então que

$$I_m(f) = \mathbb{R},$$

isto é, f é sobrejetiva e assim é também bijetiva.

Exercício:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = 5x + 3.$$

Já mostramos que f é bijetiva.

Vamos obter a inversa de f.

$$f: \; y = 5x + 3,$$
$$f^{-1}: \; x = 5y + 3,$$

ou seja,

$$y = \frac{x-3}{5}.$$

Portanto $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}.$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, onde

$$f(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

e onde $a > 0, \; a \neq 1$.

Assim, segundo f,

$$y = a^x$$

logo,

$$\log_a y = \log_a a^x = x \log_a a = x,$$

Ou seja

$$x = f^{-1}(y) = \log_a y.$$

Portanto, $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ onde

$$f^{-1}(y) = \log_a y,$$

é a função inversa de f.

Observe que o domínio de f é $D(f) = \mathbb{R}$ e sua imagem é $I_m(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

E também, o domínio de f^{-1} é $D(f^{-1}) = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} = I_m(f)$, e sua imagem é $I_m(f^{-1}) = \mathbb{R} = D(f)$.

Exercício: Esboce o grafico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ e $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = 2^x, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$f^{-1}(x) = \log_2 x, \forall x > 0$$

4 Inequações Logarítmicas

Sejam $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$ com $a \neq 1$.
Assim, se $a > 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é estritamente crescente, ou seja,

$$\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c.$$

Por outro lado, se $0 < a < 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é estritamente decrescente, ou seja,

$$\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c.$$

Exemplo (primeiro tipo de inequação)
Considere a inequação:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x).$$

Assim se $a > 1$, deve-se ter:

$$f(x) > g(x) > 0.$$

E se $0 < a < 1$, deve-se ter

$$g(x) > f(x) > 0.$$

Exercício: Resolva a inequação real.

$$\log_{1/2}(3x - 1) > \log_{1/2}(2x + 3).$$

assim deve-se ter

$$2x + 3 > 3x - 1 > 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned} 2x + 1 > 3x - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -x > -2 \\ &\Leftrightarrow \quad x < 2. \end{aligned} \tag{3}$$

E,

$$3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1/3.$$

Logo, o conjunto solução S será:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1/3 < x < 2\}.$$

Exercício: Resolva a inequação

$$\log_{1/10}(x^2 + 1) < \log_{1/10}(2x - 5).$$

Exemplo (segundo tipo de inequação)

Seja $K \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ com $a \neq 1$.

Considere a inequação:

$$\log_a f(x) > K.$$

Assim temos,

$$\log_a f(x) > \log_a a^K$$

e portanto se $a > 1$ deve-se ter

$$f(x) > a^K.$$

Por outro lado, se $0 < a < 1$, deve-se ter,

$$0 < f(x) < a^K.$$

Considere agora a inequação:

$$\log_a f(x) < K.$$

Assim temos,

$$\log_a f(x) < \log_a a^K$$

e portanto se $a > 1$ deve-se ter

$$0 < f(x) < a^K.$$

Por outro lado, se $0 < a < 1$, deve-se ter,

$$f(x) > a^K.$$

Exercício:

Resolva a inequação:

$$\log_3(3x + 2) < 2.$$

Assim, deve-se ter

$$\log_3(3x + 2) < \log_3 3^2,$$

ou seja

$$0 < 3x + 2 < 3^2.$$

Observe que

$$3x + 2 < 9 \Leftrightarrow x < 7/3.$$

E,

$$3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2/3.$$

x	$y = 2x + 1$
0.9	2.8
0.99	2.98
0.999	2.998

Table 1: Aproximações para $f(x)$ quando $x \to 1^-$.

x	$y = 2x + 1$
1.1	3.2
1.01	3.02
1.001	3.002

Table 2: Aproximações para $f(x)$ quando $x \to 1^+$.

Logo,

$$S = \{x \in \mathbb{R}\,;\; -2/3 < x < 7/3\}.$$

Exercício: Resolva a inequação real:

$$\log_2 x + \log_2(x+1) < \log_2(x+6).$$

5 Limites

Noção intuitiva: A ideia de limite de uma função num ponto x_0 refere-se a qual valor $f(x)$ se aproxima quando x se aproxima de x_0.

Vejamos o exemplo,

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \neq 1 \\ 5, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Assim $y = f(x) = 2x + 1$ quando $x \neq 1$.

Logo quando x aproxima-se de 1, $f(x)$ aproxima-se de $2(1) + 1 = 3$, vejamos as tabelas 1 e 2.

Observe que a noção de limite refere-se ao que acontece nas vizinhaças do ponto em questão, no caso $x_0 = 1$, mas não exatamente no ponto x_0

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \neq 5 = f(1).$$

5.1 Limites, definição formal

Definition 5.1. *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a,b)$.*

Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 vale $L \in \mathbb{R}$, quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nesse caso denotamos,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Exemplo:
Considere novamente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que,

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \neq 1 \\ 5, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Provaremos formalmente que,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x + 1 = 3.$$

Seja $\varepsilon > 0$.
Assim

$$\begin{aligned} & |2x+1-3| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow\ & |2x-2| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow\ & 2|x-1| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow\ & |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} (\equiv \delta). \end{aligned} \tag{4}$$

Logo,

$$0 < |x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x+1-3| < \varepsilon.$$

Formalmente, temos:
Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon/2$ tal que se $0 < |x-1| < \delta = \varepsilon/2$, então

$$|2x+1-3| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x + 1 = 3.$$