Cálculo 1 - Décima Primeira Aula
Limites

Prof. Fabio Silva Botelho

August 21, 2017

1 Limites

Noção intuitiva: A ideia de limite de uma função num ponto x_0 refere-se a qual valor $f(x)$ se aproxima quando x se aproxima de x_0.

Vejamos o exemplo,

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \neq 1 \\ 5, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Assim $y = f(x) = 2x + 1$ quando $x \neq 1$.

Logo quando x aproxima-se de 1, $f(x)$ aproxima-se de $2(1) + 1 = 3$, vejamos as tabelas 1 e 2.

Observe que a noção de limite refere-se ao que acontece nas vizinhaças do ponto em questão, no caso $x_0 = 1$, mas não exatamente no ponto x_0

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \neq 5 = f(1).$$

1.1 Limites, definição formal

Definition 1.1. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a, b)$.*

Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 vale $L \in \mathbb{R}$, quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nesse caso denotamos,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

x	$y = 2x + 1$
0.9	2.8
0.99	2.98
0.999	2.998

Table 1: Aproximações para $f(x)$ quando $x \to 1^-$.

x	$y = 2x + 1$
1.1	3.2
1.01	3.02
1.001	3.002

Table 2: Aproximações para $f(x)$ quando $x \to 1^+$.

Exemplo:
Considere novamente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \neq 1 \\ 5, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Provaremos formalmente que,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x + 1 = 3.$$

Seja $\varepsilon > 0$.
Assim

$$\begin{aligned} & |2x + 1 - 3| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \; & |2x - 2| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \; & 2|x - 1| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \; & |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} (\equiv \delta). \end{aligned} \tag{1}$$

Logo,

$$0 < |x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x + 1 - 3| < \varepsilon.$$

Formalmente, temos:
Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon/2$ tal que se $0 < |x - 1| < \delta = \varepsilon/2$, então

$$|2x + 1 - 3| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x + 1 = 3.$$

Exercício: Prove formalmente que

$$\lim_{x \to 3} 5x + 4 = 19.$$

Exercício: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = ax + b, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

onde $a \neq 0$.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Prove formalmente que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = ax_0 + b.$$

2 Unicidade do Limite

Theorem 2.1. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in (a, b)$.*

Suponha que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2 \in \mathbb{R}.$$

Sob tais hipóteses

$$L_1 = L_2.$$

Portanto, se o limite existe, ele é único.

Proof. Seja $\varepsilon > 0$.

De $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta_1$, então

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta_2$, então

$$|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Defina $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e escolha $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x_1 - x_0| < \delta$.

Logo,

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x_1) + f(x_1) - L_2| \\ &\leq |f(x_1) - L_1| + |f(x_1) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned} \tag{2}$$

ou seja

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, obtemos,

$$|L_1 - L_2| = 0,$$

isto é,

$$L_1 = L_2.$$

A prova está completa. □

Theorem 2.2 (Confronto)**.** *Sejam $f, g, h : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções tais que existe $\delta_0 > 0$ tal que se*

$$0 < |x - x_0| < \delta_0,$$

então

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x). \tag{3}$$

Suponha também que,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

Sob tais hipóteses, temos que

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

Proof. De $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|f(x) - L| < \varepsilon,$$

ou seja

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \tag{4}$$

De $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta_2$, então

$$|h(x) - L| < \varepsilon,$$

ou seja

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon. \tag{5}$$

Defina $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$. Assim se

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

de (3),(4) e (5) obtemos:

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon,$$

isto é,

$$|g(x) - L| < \varepsilon,$$

se

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

$\square$

Proposition 2.3. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a, b)$.*

Suponha que

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0.$$

Sob tais hipóteses,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Proof. Seja $\varepsilon > 0$.

De $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$||f(x)| - 0| < \varepsilon,$$

e assim

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Portanto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

A prova está completa. $\square$

Exemplo:

Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, tal que,

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mostre que

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Observe que, para $x \neq 0$,

$$0 \leq \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \cdot 1 = |x|.$$

Como

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

do Teorema do confronto obtemos,

$$\lim_{x \to 0} \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0,$$

e assim,

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

2.1 Propriedades dos Limites

Theorem 2.4. *Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções e seja $x_0 \in (a, b)$.*

Suponha que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}.$$

Sob tais hipóteses,

1. $$\lim_{x \to x_0} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot L, \ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

2. $$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = L + M,$$

3. $$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M,$$

4. $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \ \text{se } M \neq 0.$$

Exercício:

Calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x + 1}{x + 3}.$$

Remark 2.5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.

Tal função é dita ser polinomial.

Das propriedades dos limites,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0),$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Seja

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

onde

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m,$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $a_0, \cdots a_n, b_0, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$.
Tal função h *é dita ser racional.*

Assim, do exposto acima e das propriedades dos limites

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = h(x_0),$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $g(x_0) \neq 0$.

Exercício:
Calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Observe que

$$l = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0},$$

ou seja o limite é indeterminado.
Vamos resolver essa indeterminação.
Observe que se $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = x + 1,$$

e assim,

$$l = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2.$$

Resumindo,

$$l = 2.$$

Exercício:
Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3 + x)^2 - 9}{x}.$$

3 Limite da Função Composta

Theorem 3.1 (Limite da função composta)**.** *Sejam* $f(a, b) \to \mathbb{R}$ *e* $g : (d, e) \to \mathbb{R}$ *funções e seja* $x_0 \in (a, b)$.

Suponha que,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c \in (d, e),$$

e

$$\lim_{y \to c} g(y) = g(c).$$

Sob tais hipóteses,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(c).$$

Theorem 3.2. *Seja* $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *onde*

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Sob tais hipóteses,

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}, \ \forall x_0 \geq 0.$$

Exercício:
Calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

Exercício: Seja $a > 0$.
Calcule

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}.$$

Exercício: Calcule

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}.$$

Exercício: Calcule

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}.$$

Exercício: Calcule,

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x - 4}.$$