Cálculo 1 - Décima Segunda Aula
Cálculo de Limites

Prof. Fabio Silva Botelho

August 22, 2017

1 Propriedades dos Limites

1.1 Limites, definição formal

Definition 1.1. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a, b)$.*

Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 vale $L \in \mathbb{R}$, quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nesse caso denotamos,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Exercício: Prove formalmente que:

$$\lim_{x \to 3} 5x + 2 = 17.$$

Theorem 1.2. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a, b)$.*

Asuma que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

Sob tais hipóteses, existem $\delta > 0$ e $A > 0$ tais que

$$|f(x)| < A, \ \forall x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Proof. Seja $\varepsilon = 1$. De

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|f(x) - L| < \varepsilon = 1.$$

Logo,

$$|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < 1,$$

ou seja,

$$|f(x)| < |L| + 1 \equiv A,$$

se

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

$\square$

1.2 Propriedades dos Limites

Theorem 1.3. *Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções e seja $x_0 \in (a, b)$.*

Suponha que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}.$$

Sob tais hipóteses,

1. $$\lim_{x \to x_0} \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot L, \ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

2. $$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = L + M,$$

3. $$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M,$$

4. $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \ \text{se } M \neq 0.$$

Proof. Provaremos apenas o item (3), deixando a prova dos demais ítens como exercício.

Observe que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x) - L| = 0.$$

De fato a aplicação da definição de limite coincide nos dois casos.

Comentário análogo vale para g.

De

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

e do último teorema, existem $\delta > 0$ e $A > 0$ tais que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|f(x)| < A.$$

Logo, disto, das hipóteses e das propriedades 1 e 2, se $0 < |x - x_0| < \delta$, obtemos,

$$
\begin{aligned}
0 \leq |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\
&= |f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)| \\
&\leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \\
&< |A||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \\
&\to 0, \text{ quando } x \to x_0. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Portanto, disto e do Teorema do confronto obtemos

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)g(x) - LM| = 0$$

ou seja

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = LM.$$

□

Exercício:
Calcule

$$\lim_{x \to 3} \frac{21x + 4}{7x + 5}.$$

Exercício:
Calcule

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}.$$

Exercício: Calcule

$$\lim_{h \to 0} \frac{(5 + h)^2 - 25}{h}.$$

Remark 1.4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$.
Tal função é dita ser polinomial.
Das propriedades dos limites,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0),$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$.
Seja

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

onde

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m,$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $a_0, \cdots a_n, b_0, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$.
Tal função h *é dita ser racional.*

Assim, do exposto acima e das propriedades dos limites

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = h(x_0),$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $g(x_0) \neq 0$.

Exercício:
Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Calcule

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h}.$$

Exercício:
Calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Exercício:

Calcule

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}.$$

Exercício:
Calcule

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 5}.$$

Exercício:
Calcule

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x - 4}.$$

2 Limite da Função Composta

Theorem 2.1 (Limite da função composta)**.** *Sejam* $f(a,b) \to \mathbb{R}$ *e* $g:(d,e) \to \mathbb{R}$ *funções e seja* $x_0 \in (a,b)$.

Suponha que,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c \in (d,e),$$

e

$$\lim_{y \to c} g(y) = g(c).$$

Sob tais hipóteses,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(c).$$

Theorem 2.2. *Seja* $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *onde*

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Sob tais hipóteses,

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}, \ \forall x_0 \geq 0.$$

Exercício:
Calcule

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$

Exercício: Seja $a > 0$.
Calcule

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}.$$

Exercício
Calcule

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x+3}-\sqrt{12}}{x-3}.$$

Exercicio:
Calcule

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{3x-7}-\sqrt{14}}{\sqrt{4x+3}-\sqrt{31}}.$$