Cálculo 1 - Décima Terceira Aula
Cálculo de Limites e Limites Laterais

Prof. Fabio Silva Botelho

August 25, 2017

1 Limite da Função Composta

Theorem 1.1 (Limite da função composta)**.** *Sejam $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $g:(d,e)\to\mathbb{R}$ funções e seja $x_0\in(a,b)$.*

Suponha que,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c \in (d,e),$$

e

$$\lim_{y\to c} g(y) = g(c).$$

Sob tais hipóteses,

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(c).$$

Proof. Seja $\varepsilon > 0$.

De

$$\lim_{y\to c} g(y) = g(c),$$

existe $\eta > 0$ tal que se

$$|y-c| < \eta,$$

então

$$|g(y)-g(c)| < \varepsilon. \tag{1}$$

De

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c,$$

existe $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |x-x_0| < \delta,$$

então

$$|f(x)-c| < \eta.$$

Disto e (1), obtemos,

$$|g(f(x)) - g(c)| < \varepsilon,$$

se

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(c).$$

A prova está completa. $\square$

Theorem 1.2. *Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ onde*

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Sob tais hipóteses,

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0},\ \forall x_0 \geq 0.$$

Proof. Seja $x_0 > 0$ (o caso $x_0 = 0$ será tratado em seguida).

Logo para $x \geq 0$ tal que $x \neq x_0$, obtemos,

$$\frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} = 1,$$

e assim,

$$\frac{|(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})||\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|}{|x - x_0|} = 1,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 0 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{x}_0| &= \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \\ &\leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} = 0,$$

disto, de (2) e do teorema do confronto, obtemos,

$$\lim_{x \to x_0} |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

Para o caso $x_0 = 0$, seja $\varepsilon > 0$. Para $x > 0$ temos que

$$\sqrt{x} < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < x < \varepsilon^2 (\equiv \delta).$$

Logo, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon^2 > 0$ tal que se

$$0 < x < \delta = \varepsilon^2,$$

então

$$\sqrt{x} = |\sqrt{x}| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

A prova está completa. $\square$

Exemplo: Calcule

$$\lim_{x \to 5^+} \sqrt{\frac{x^2 - 25}{x - 5}}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5^+} \frac{x^2 - 25}{x - 5} &= \lim_{x \to 5^+} \frac{(x + 5)(x - 5)}{x - 5} \\ &= \lim_{x \to 5^+} x + 5 \\ &= 5 + 5 = 10. \end{aligned} \tag{3}$$

Disto, do último teorema e do teorema do limite para função composta, obtemos,

$$\lim_{x \to 5^+} \sqrt{\frac{x^2 - 25}{x - 5}} = \sqrt{\lim_{x \to 5^+} \left(\frac{x^2 - 25}{x - 5} \right)} = \sqrt{10}.$$

Exercício
Calcule

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x + 3} - \sqrt{12}}{x - 3}.$$

Exercicio:
Calcule

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{3x - 7} - \sqrt{14}}{\sqrt{4x + 3} - \sqrt{31}}.$$

Exercício:

Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}.$$

Solução: Defina $y=\sqrt[3]{x+1}$. Assim $x=y^3-1$, e $y\to 1$, quando $x\to 0$.

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} &= \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^3-1}\\ &= \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)}{(y-1)(y^2+y+1)}\\ &= \lim_{y\to 1}\frac{1}{y^2+y+1}\\ &= \frac{1}{3}. \qquad (4)\end{aligned}$$

Exercício:

Calcule

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}.$$

Dica: Defina $y=\sqrt[3]{3x-5}$.

Exercício:

Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{1+\sqrt[3]{3x-1}}.$$

Solução:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{1+\sqrt[3]{3x-1}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}}{\frac{1+\sqrt[3]{3x-1}}{x}}\\ &= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt[3]{3x-1}}{x}}. \qquad (5)\end{aligned}$$

Para calcular

$$l_1\equiv\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x},$$

defina $y=\sqrt[3]{1-x}$. Assim,

$$x=1-y^3$$

e

$$y \to 1, \text{ quando } x \to 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} l_1 &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x} \\ &= \lim_{y\to 1} \frac{1-y}{1-y^3} \\ &= \lim_{y\to 1} \frac{(1-y)}{(1-y)(y^2+y+1)} \\ &= \lim_{y\to 1} \frac{1}{y^2+y+1} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{6}$$

Para calcular

$$l_2 \equiv \lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt[3]{3x-1}}{x},$$

defina $y = \sqrt[3]{3x-1}$. Assim,

$$x = \frac{1+y^3}{3}$$

e

$$y \to -1, \text{ quando } x \to 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} l_2 &= \lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt[3]{3x-1}}{x} \\ &= \lim_{y\to -1} \frac{3(1+y)}{1+y^3} \\ &= \lim_{y\to -1} \frac{3(1+y)}{(1+y)(y^2-y+1)} \\ &= \lim_{y\to -1} \frac{3}{y^2-y+1} \\ &= \frac{3}{3} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{1+\sqrt[3]{3x-1}} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{3}.$$

Exercício:

Calcule

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{2-3x}-2}{1+\sqrt[3]{2x+3}}.$$

Sugestão: Calule

$$\lim_{x\to -2} \frac{\frac{\sqrt[3]{2-3x}-2}{x+2}}{\frac{1+\sqrt[3]{2x+3}}{x+2}},$$

isto é defina

$$l_1 = \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{2-3x}-2}{x+2},$$

e

$$l_2 = \lim_{x\to -2} \frac{1+\sqrt[3]{2x+3}}{x+2}$$

e calcule

$$\frac{l_1}{l_2}.$$

2 Limites laterais

Definition 2.1 (Limites laterais)**.** *Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função e seja $x_0\in(a,b)$.*

Dizemos que o limite lateral à direita de f em x_0 vale $L\in\mathbb{R}$, quando para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que se $x_0<x<x_0+\delta$, então

$$|f(x)-L|<\varepsilon.$$

Nesse caso escrevemos,

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L\in\mathbb{R}.$$

Exemplo: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x\geq 1\\ x^2, & \text{se } x<1\end{cases}$$

Assim

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x+1 = 2(1)+1 = 3.$$

Simlarmente, dizemos que o limite lateral à esquerda de f em x_0 vale $L\in\mathbb{R}$, quando para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que se $x_0-\delta<x<x_0$, então

$$|f(x)-L|<\varepsilon.$$

Nesse caso escrevemos,

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L\in\mathbb{R}.$$

No último exemplo,

$$\lim_{x\to 1^-} = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1.$$

Theorem 2.2. *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a,b)$.*
Sob tais hipóteses,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se e somente se,

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

e

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L.$$

Exemplo:
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x+1}, & \text{se } x \geq 1 \\ -x^2 + 3, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Verifique se existe

$$\lim_{x\to 1} f(x).$$

Observe que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{3x+1} = \sqrt{3(1)+1} = \sqrt{4} = 2.$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -x^2 + 3 = -(1)^2 + 3 = 2.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2.$$

Logo, do último teorema,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$