Cálculo 1 - Décima Quarta Aula
Limites Trigonométricos

Prof. Fabio Silva Botelho

August 28, 2017

1 Limites laterais

Definition 1.1 (Limites laterais)**.** *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a, b)$.*

Dizemos que o limite lateral à direita de f em x_0 vale $L \in \mathbb{R}$, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x_0 < x < x_0 + \delta$, então

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nesse caso escrevemos,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \geq 1 \\ x^2, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Assim

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x + 1 = 2(1) + 1 = 3.$$

Simlarmente, dizemos que o limite lateral à esquerda de f em x_0 vale $L \in \mathbb{R}$, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x_0 - \delta < x < x_0$, então

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nesse caso escrevemos,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

No último exemplo,

$$\lim_{x \to 1^-} = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1.$$

Theorem 1.2. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a, b)$.*

Sob tais hipóteses,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se e somente se,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

e

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Exemplo:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x+1}, & \text{se } x \geq 1 \\ -x^2 + 3, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Verifique se existe

$$\lim_{x \to 1} f(x).$$

Observe que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{3x+1} = \sqrt{3(1)+1} = \sqrt{4} = 2.$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -x^2 + 3 = -(1)^2 + 3 = 2.$$

Assim,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2.$$

Logo, do último teorema,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

2 Limites trigonométricos

Considere o círculo trigonométrico de raio unitário (R=1) e, em função do arco x, os valores $\overline{BC} = \operatorname{sen} x$ e $\overline{0C} = \cos x$ indicados.

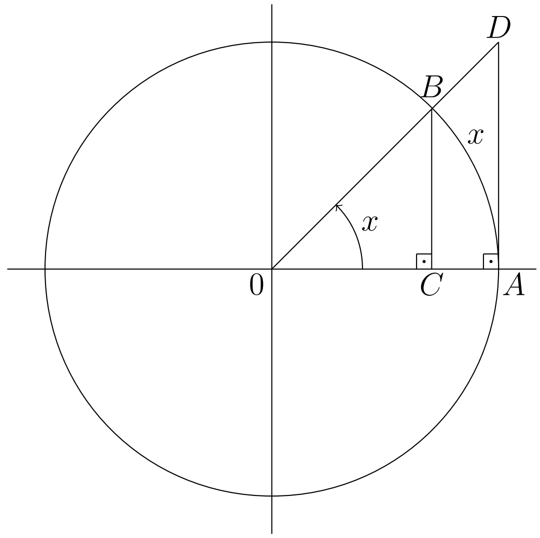

Figure 1: Círculo trigonométrico onde $\overline{0A} = 1$, $\overline{BC} = \text{sen } x$ e $\overline{0C} = \cos x$.

Do Teorema de Pitágoras, temos

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

E também por construção

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen} x \text{ e } \cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nesse ponto da aula, esboçaremos os gráficos da funções pontualmente definidas por

$$f(x) = \text{sen}(x)$$

e

$$g(x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pode-se também provar as seguintes identidades trigonométricas:

1. $$\text{sen}(x) - \text{sen}(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

2. $$\cos(x) - \cos(y) = -2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Theorem 2.1. *Os seguintes limites são válidos:*

1. $$\lim_{x \to x_0} sen(x) = sen(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

2.
$$\lim_{x\to x_0}\cos(x)=\cos(x_0),\forall x_0\in\mathbb{R},$$

Proof. Seja $x_0\in\mathbb{R}$.

Do círculo trigonométrico acima indicado, para $0<x<\pi/2$, temos que,
$$\text{Área }\Delta 0AB\le \text{Área setor }0AB$$
e assim,
$$0\le \text{sen}x\cdot 1/2\le x\cdot 1/2,$$
ou seja
$$0\le \text{sen}x\le x,$$
$\forall 0<x<\pi/2$.

De fato, por simetria, podemos obter que
$$0\le|\text{sen}x|\le|x|,\forall|x|<\pi/2.$$

Logo, disto e da identidade 1 acima indicada, para
$$0<|x-x_0|<\pi/2,$$
podemos escrever
$$\begin{aligned}0 &\le |\text{sen}x-\text{sen}x_0|\\ &= \left|2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\\ &= 2\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|\left|\text{ sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|\\ &\le 2(1)\frac{|x-x_0|}{2}\\ &= |x-x_0|. \end{aligned}\tag{1}$$
Como
$$\lim_{x\to x_0}|x-x_0|=0,$$
disto, de (1) e do Teorema do Confronto, obtemos
$$\lim_{x\to x_0}|\text{sen}x-\text{sen}x_0|=0,$$
ou seja,
$$\lim_{x\to x_0}\text{sen}x=\text{sen}x_0.$$

A prova de
$$\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$$
é deixada como exercício.

□

Theorem 2.2 (Limite trigonométrico fundamental)**.** *O seguinte limite é válido:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x} = 1.$$

Proof. Considere a figura abaixo indicada, onde genericamente denotamos $\overline{AB}$ como a medida do segmento de A a B.

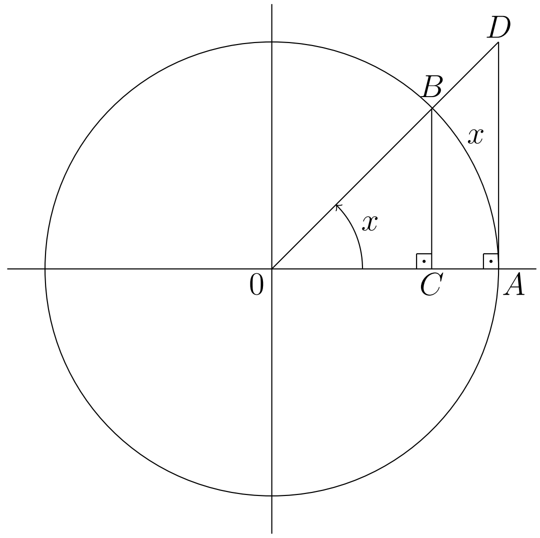

Figure 2: Círculo trigonométrico onde $\overline{0A} = 1$, $\overline{BC} = \text{sen}x$ e $\overline{0C} = \cos x$.

Da figura, temos que a área do triângulo $0AB$ é menor do que a área do setor circular $0AB$, a qual é menor do que a área do triângulo $0AD$.

Logo,

$$\frac{\text{sen}x}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\overline{AD}}{2}.$$

Por outro lado

$$\frac{\overline{AD}}{1} = \frac{\text{sen}x}{\cos x},$$

isto é

$$\overline{AD} = \frac{\text{sen}x}{\cos x}$$

e portanto,

$$\text{sen}x \le x \le \frac{\text{sen}x}{\cos x}, \quad \forall 0 \le x < \frac{\pi}{2}.$$

Assim

$$1 \le \frac{x}{\text{sen}x} \le \frac{1}{\cos x},$$

e portanto,

$$\cos x \le \frac{\text{sen}x}{x} \le 1,$$

$\forall x > 0$ suficientemente pequeno.

Como

$$\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1,$$

dessas três últimas linhas e do Teorema do confronto, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Similarmente, podemos obter,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}x}{x} = 1.$$

Conclui-se então que,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1.$$

A prova está completa. $\square$

Exemplo:
Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(5x)}{x}.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(5x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(5x)}{5x} 5 \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}y}{y} 5 \\ &= 1 \cdot 5 = 5, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $y = 5x \to 0$ quando $x \to 0$.