Cálculo 1 - Décima Quinta Aula
Limites Infinitos

Prof. Fabio Silva Botelho

September 1, 2017

1 Limites Infinitos

Definition 1.1 (Limites infinitos)**.** *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a, b)$.*

Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 vale $+\infty$ (+ infinito) quando para cada $A > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $f(x) > A$.

Nesse caso escrevemos,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}.$$

Vejamos as tabelas 1 e 2:

Quando x se aproxima de a, $(x - a)$ se aproxima de zero e assim

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

De fato, seja $A > 0$.

Assim para $x \neq a$ temos que

$$\frac{1}{(x-a)^2} > A \Leftrightarrow (x-a)^2 < \frac{1}{A} \Leftrightarrow |x-a| < \frac{1}{\sqrt{A}} (\equiv \delta). \tag{1}$$

x	$1/(x-a)^2$
$a + 0.1$	$1/(0.1)^2 = 100$
$a + 0.01$	$1/(0.01)^2 = 10^4$
$a + 0.001$	$1/(0.001)^2 = 10^6$
$a + 0.0001$	$1/(0.0001)^2 = 10^8$

Table 1: Aproximações para $f(x) = 1/(x-a)^2$ quando $x \to a^+$.

x	$1/(x-a)^2$
$a-0.1$	$1/(-0.1)^2 = 100$
$a-0.01$	$1/(-0.01)^2 = 10^4$
$a-0.001$	$1/(-0.001)^2 = 10^6$
$a-0.0001$	$1/(-0.0001)^2 = 10^8$

Table 2: Aproximações para $f(x) = 1/(x-a)^2$ quando $x \to a^-$.

Logo,

$$0 < |x-a| < \delta = \frac{1}{\sqrt{A}} \Rightarrow \frac{1}{(x-a)^2} > A.$$

Podemos então escrever,
Para cada $A > 0$ existe $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então

$$f(x) > A.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Similarmente, escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

quando para cada $B < 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então $f(x) < B$.

Definition 1.2. *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a,b)$.*
Suponha que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

1. *Se existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-x_0| < \delta$ então $f(x) > 0$, escrevemos,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0+.$$

2. *Se existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-x_0| < \delta$ então $f(x) < 0$, escrevemos,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0-.$$

Definições análogas são válidas para limites laterais.

Exemplo:

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0+.$$

$$\lim_{x\to 1^+} x-1 = 0+.$$

$$\lim_{x\to 1^-} x-1 = 0-.$$

Theorem 1.3. *Sejam $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funções e seja $x_0 \in (a,b)$.*

Suponha que,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0,$$

e

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Sob tais hipóteses,

1. *Se $c > 0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0+$, então*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \text{"}\left(\frac{c}{0+}\right)\text{"} = +\infty.$$

2. *Se $c > 0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0-$, então*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \text{"}\left(\frac{c}{0-}\right)\text{"} = -\infty.$$

3. *Se $c < 0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0+$, então*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \text{"}\left(\frac{c}{0+}\right)\text{"} = -\infty.$$

4. *Se $c < 0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0-$, então*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \text{"}\left(\frac{c}{0-}\right)\text{"} = +\infty.$$

Observação: A notação

$$\text{"}\left(\frac{c}{0+}\right)\text{"}$$

e outras análogas são apenas informais pois não se pode dividir por zero.

Resultados análogos são válidos para limites laterais.

Proof. Provaremos apenas o item 1. A prova dos demis ítens é deixada como exercício.

Assuma então, $c > 0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0+$, além de

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = c > 0.$$

Seja $\varepsilon = c/2 > 0$. De

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = c,$$

existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta_1$, então

$$|g(x) - c| < \varepsilon = c/2.$$

Logo

$$-c/2 < g(x) - c < c/2,$$

e assim

$$g(x) > c - c/2 = c/2. \tag{2}$$

Seja $A > 0$.

Para $\varepsilon_1 = c/(2A)$, de

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^+,$$

existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta_2$, então

$$0 < f(x) < \varepsilon_1 = c/(2A),$$

ou seja

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{2A}{c}. \tag{3}$$

Defina $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Portanto, de (2) e (3), se

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

obtemos,

$$\frac{g(x)}{f(x)} > \frac{c}{2}\frac{2A}{c} = A.$$

Sendo $A > 0$ arbitrário, conclui-se que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty.$$

A prova está completa.

$\square$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}.$$

Calcule

$$\lim_{x \to 3^+} f(x)$$

e

$$\lim_{x \to 3^-} f(x).$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \text{"}\left(\frac{3^2+1}{0^+}\right)\text{"} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \text{"}\left(\frac{3^2+1}{0^-}\right)\text{"} = -\infty.$$

Exercício: Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x-2}.$$

Calcule

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \text{ e } \lim_{x\to 1^-} f(x),$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) \text{ e } \lim_{x\to -2^-} f(x).$$

Observe que

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2.$$

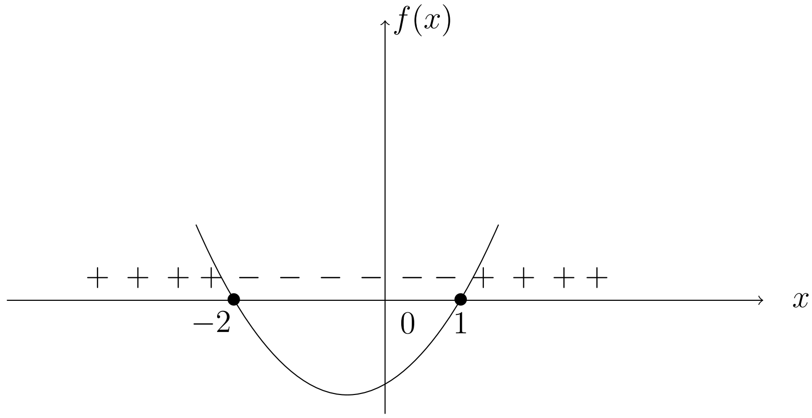

Figure 1: Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 + x - 2$.

Do gráfico acima indicado temos,

$$\lim_{x\to 1^+} x^2 + x - 2 = 0^+ \text{ e } \lim_{x\to 1^-} x^2 + x - 2 = 0^-.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \text{"}\left(\frac{1^2+1}{0^+}\right)\text{"} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \text{"}\left(\frac{1^2+1}{0^-}\right)\text{"} = -\infty.$$

E também do gráfico acima indicado,

$$\lim_{x\to -2^+} x^2 + x - 2 = 0^- \text{ e } \lim_{x\to -2^-} x^2 + x - 2 = 0^+.$$

Logo,

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \text{''}\left(\frac{(-2)^2+1}{0^-}\right)\text{''} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \text{''}\left(\frac{(-2)^2+1}{0^+}\right)\text{''} = +\infty.$$