Cálculo 1 - Décima Sexta Aula
Limites Infinitos e Limites no Infinito

Prof. Fabio Silva Botelho

September 4, 2017

1 Revisão sobre limites infinitos

Definition 1.1. *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a,b)$.*

Suponha que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

1. *Se existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$ então $f(x) > 0$, escrevemos,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0+.$$

2. *Se existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$ então $f(x) < 0$, escrevemos,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0-.$$

Definições análogas são válidas para limites laterais.

Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0+.$$

$$\lim_{x \to 1^+} x - 1 = 0+.$$

$$\lim_{x \to 1^-} x - 1 = 0-.$$

Theorem 1.2. *Sejam $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funções e seja $x_0 \in (a,b)$.*

Suponha que,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0,$$

e

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Sob tais hipóteses,

1. Se $c > 0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0+$, então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \text{"}\left(\frac{c}{0+}\right)\text{"} = +\infty.$$

2. Se $c > 0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0-$, então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \text{"}\left(\frac{c}{0-}\right)\text{"} = -\infty.$$

3. Se $c < 0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0+$, então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \text{"}\left(\frac{c}{0+}\right)\text{"} = -\infty.$$

4. Se $c < 0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0-$, então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \text{"}\left(\frac{c}{0-}\right)\text{"} = +\infty.$$

Observação: A notação

$$\text{"}\left(\frac{c}{0+}\right)\text{"}$$

e outras análogas são apenas informais pois não se pode dividir por zero.

Resultados análogos são válidos para limites laterais.

Na última aula (Aula 15) vimos a prova desse teorema. Não a repetiremos aqui.

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}.$$

Calcule

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)$$

e

$$\lim_{x\to 3^-} f(x).$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \text{"}\left(\frac{3^2+1}{0^+}\right)\text{"} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \text{"}\left(\frac{3^2+1}{0^-}\right)\text{"} = -\infty.$$

Exercício: Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x-2}.$$

Calcule

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \text{ e } \lim_{x\to 1^-} f(x),$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) \text{ e } \lim_{x\to -2^-} f(x).$$

Observe que

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2.$$

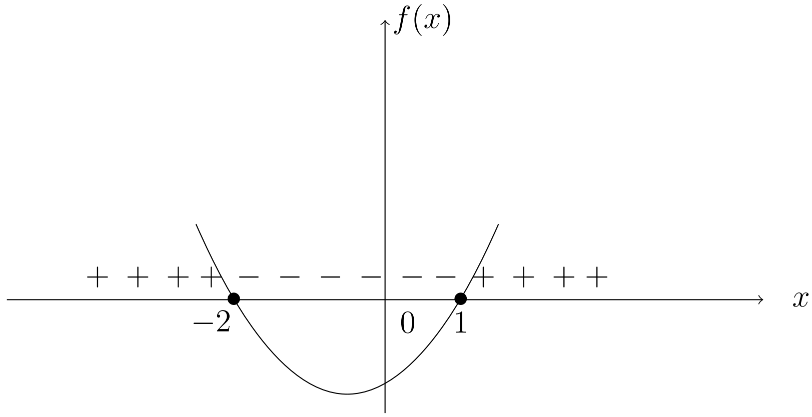

Figure 1: Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 + x - 2$.

Do gráfico acima indicado temos,

$$\lim_{x\to 1^+} x^2 + x - 2 = 0^+ \text{ e } \lim_{x\to 1^-} x^2 + x - 2 = 0^-.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \text{''}\left(\frac{1^2+1}{0^+}\right)\text{''} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \text{''}\left(\frac{1^2+1}{0^-}\right)\text{''} = -\infty.$$

E também do gráfico acima indicado,

$$\lim_{x\to -2^+} x^2 + x - 2 = 0^- \text{ e } \lim_{x\to -2^-} x^2 + x - 2 = 0^+.$$

Logo,

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \text{''}\left(\frac{(-2)^2+1}{0^-}\right)\text{''} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \text{''}\left(\frac{(-2)^2+1}{0^+}\right)\text{''} = +\infty.$$

x	$1/x$
10	$1/(10)$
100	$1/100$
1000	$1/1000$
10000	$1/(10000)$

Table 1: Aproximações para $f(x) = 1/x$ quando x cresce.

2 Limites no Infinito

Definition 2.1. *Seja $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função.*

Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x vai para $+\infty$ vale $L \in \mathbb{R}$, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que se $x > A$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nesse caso escrevemos,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Vejamos a tabela 1.

Quando x cresce, $1/x$ aproxima-se de zero.

Claramente,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

De fato, seja $\varepsilon > 0$.

Assim para $x > 0$ temos que

$$0 < \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} (\equiv A) \tag{1}$$

Logo, para cada $\varepsilon > 0$ existe $A = \frac{1}{\varepsilon}$ tal que se $x > A = \frac{1}{\varepsilon}$, então

$$0 < \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Portanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Exercício: Seja $n \in \mathbb{N}$.

Prove formalmente que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Similarmente, para $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$, escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R},$$

quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $B < 0$ tal que se $x < B$, então

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Observe também que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \text{''}\left(\frac{1}{0^+}\right)\text{''} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \text{''}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{''} = -\infty.$$

Observação: As propriedades usuais de limites também são válidas para limites no infinito.

Exemplo:

Calcule

$$l = \lim_{x \to +\infty} \frac{8x^2 - 3x + 9}{3x^2 - 2x + 1}.$$

Assim

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{8x^2-3x+9}{x^2}}{\frac{3x^2-2x+1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{8 - 3/x + 9/x^2}{3 - 2/x + 1/x^2} \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Observação: Para $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quando

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

dizemos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

Exercício:

Obtenha as assíntotas verticais e horizontais de

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - x - 6}.$$

Assíntotas verticais:

Possivelmente soluções da equação:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Observe que

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -2.$$

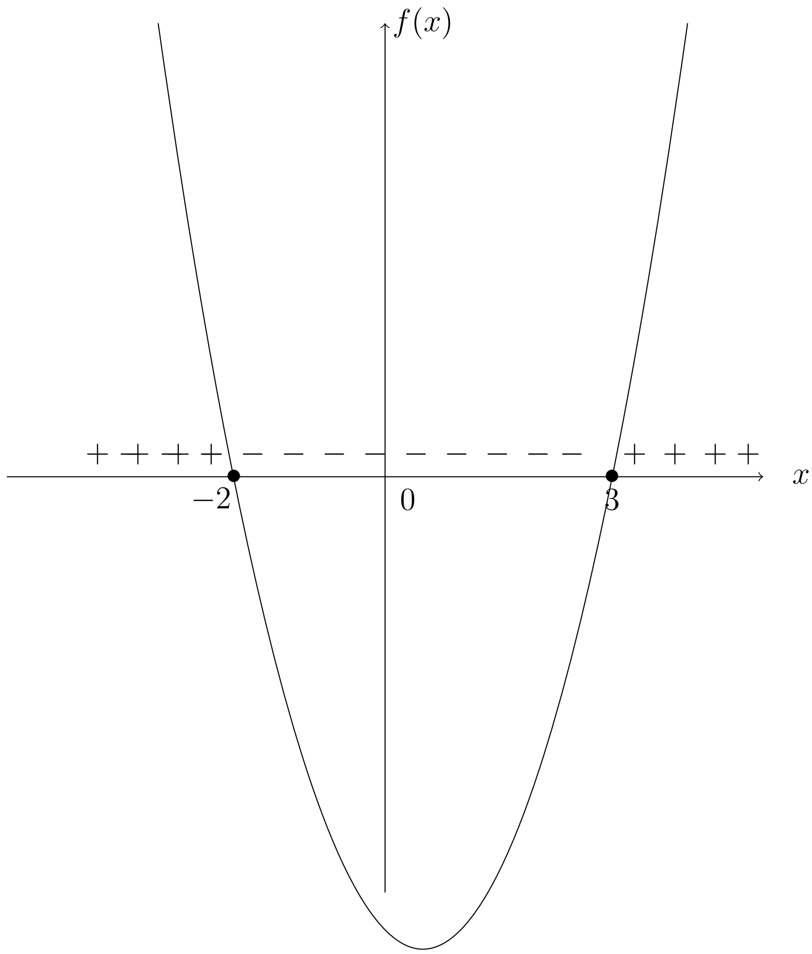

Figure 2: Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - x - 6$.

De fato,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - x - 6} = \text{"}\left(\frac{14}{0^+}\right)\text{"} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - x - 6} = \text{"}\left(\frac{14}{0^-}\right)\text{"} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - x - 6} = \text{"}\left(\frac{19}{0^-}\right)\text{"} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - x - 6} = \text{"}\left(\frac{19}{0^+}\right)\text{"} = +\infty.$$

Logo, as assíntotas verticais de f são as retas $x = 3$ e $x = -2$.
Observe também que

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to+\infty} f(x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2-3x+5}{x^2}}{\frac{x^2-x-6}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-3/x+5/x^2}{1-1/x-6/x^2} \\ &= \frac{2}{1} = 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Similarmente, podemos obter,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2.$$

Portanto a reta $y = 2$ é assíntota horizontal de f.

Exercício: Obtenha as assíntotas horizontais e verticais de

$$f(x) = \frac{5x-3}{3-2x}.$$

Exercício: Seja

$$f(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}.$$

Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Exercício: Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x.$$

Exercício: Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+x} - 2x.$$