Cálculo 1 - Décima Sétima Aula
Complementos sobre Limites Infinitos
e Introdução aos Limites Exponenciais

Prof. Fabio Silva Botelho

September 6, 2017

1 Limites Infinitos - considerações finais

Definition 1.1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ é tal que*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

ou

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty,$$

dizemos que a reta $x = x_0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f.

Por outro lado, se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R},$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R},$$

dizemos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

Exemplo: Seja

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 8}{x^2 - 2x - 3}.$$

Obtenha as assíntotas verticais e horizontais de f.

Possíveis assíntotas verticais.

São soluções da equação:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

isto é

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)(1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}.$$

Assim

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$$

e

$$x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Portanto

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \text{"}\left(\frac{3(3)^2 + 5(3) + 8}{0+}\right)\text{"} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \text{"}\left(\frac{3(3)^2 + 5(3) + 8}{0-}\right)\text{"} = -\infty.$$

E também,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \text{"}\left(\frac{3(-1)^2 + 5(-1) + 8}{0-}\right)\text{"} = \text{"}\left(\frac{6}{0-}\right)\text{"} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \text{"}\left(\frac{3(-1)^2 + 5(-1) + 8}{0-}\right)\text{"} = \text{"}\left(\frac{6}{0+}\right)\text{"} = +\infty.$$

Portanto as assíntotas verticais são $x = -1$ e $x = 3$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 8}{x^2 - 2x - 3} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x^2+5x+8}{x^2}}{\frac{x^2-2x-3}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + 5/x + 8/x^2}{1 - 2/x - 3/x^2} = \frac{3}{1} = 3. \end{aligned} \tag{1}$$

Similarmente,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3.$$

Portanto, a reta $y = 3$ é a assíntota horizontal de f.

2 Limites Infinitos no Infinito

Definition 2.1. *Seja $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ vale $+\infty$, quando para cada $A > 0$ existe $B > 0$ tal que se $x > B$, então $f(x) > A$.*

Nesse caso escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exemplo: Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = x^2$.

Mostraremos que

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.$$

De fato, seja $A > 0$.

Assim, para $x > 0$ temos que

$$x^2 > A \Leftrightarrow x > \sqrt{A} = B.$$

Ou seja

$$x > B = \sqrt{A} \Rightarrow x^2 > A.$$

Mais formalmente, para cada $A > 0$ existe $B = \sqrt{A} > 0$ tal que se $x > B = \sqrt{A}$, então

$$f(x) = x^2 > A.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.$$

Similarmente, para $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

quando, para cada $A > 0$, existe $B < 0$ tal que se $x < B$, então $f(x) > A$.

E também, para $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

quando para cada $A < 0$ existe $B > 0$ tal que se $x > B$, então $f(x) < A$.

Similarmente, para $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$, escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

quando para cada $A < 0$ existe $B < 0$ tal que se $x < B$, então $f(x) < A$.

Exercício: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = x^n$ e onde $n \in \mathbb{N}$.

1. Se n é par, prove formalmente que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Se n é ímpar, prove formalmente que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

2.1 Assíntotas Oblíquas

Definition 2.2. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que a reta $y = ax + b$ onde $a \neq 0$ seja tal que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0,$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

Nesse caso dizemos que tal reta $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f.

Exercício: Obtenha as assíntotas verticais e oblíquas de

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3}{2 - 3x}.$$

Exercício: Calcule

$$\lim_{w \to -\infty} \frac{\sqrt{3w^2 + 2w - 1}}{7w - 4}.$$

Exercício: Seja

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x + 25}{x(x^2 + x - 2)}.$$

Obtenha as assíntotas verticais e oblíquas de f.

3 Limites para funções exponenciais

Theorem 3.1. *Os seguintes limites são válidos,*

1.

$$\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}, \ \forall x_0 \in \mathbb{R},$$

2.

$$\lim_{x \to x_0} \ln(x) = \ln(x_0), \ \forall x_0 > 0,$$

onde,

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} \approx 2.7183 \cdots .$$

Além disso, para $a > 0$, $a \neq 1$ temos que

3.

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}, \ \forall x_0 \in \mathbb{R},$$

4.
$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0,\ \forall x_0 > 0.$$

Finalmente,

5.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

6.
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ \forall a > 0,\ a \neq 1.$$

Proof. Provaremos apenas os ítens 5 e 6.

Defina $y = e^x$, assim $y = e^x \to e^0 = 1$, quando $x \to 0$.

Logo,
$$\ln y = \ln(e^x) = x \ln e = x \cdot 1 = x,$$
e assim

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{\ln y} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{1}{\frac{1}{y-1}\ln y} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{1}{\ln[y^{1/(y-1)}]}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Defina $z = y - 1$, assim $y = z + 1$ e $z = y - 1 \to 0$ quando $y \to 1$ e portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 1} \frac{1}{\ln y^{1/(y-1)}} &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{\ln[(z+1)^{1/z}]} \\
&= \frac{1}{\ln[\lim_{z\to 0}(z+1)^{1/z}]} \\
&= \frac{1}{\ln e} \\
&= \frac{1}{1} \\
&= 1. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Logo
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(a^x)}-1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(a)}-1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(a)}-1}{x\ln a}\ln a\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\ln a\\
&= \ln a\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\\
&= \ln a, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

onde

$$y = x\ln a \to 0$$

quando $x \to 0$.

A prova está completa.

$\square$

Exercício:

Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}.$$

$$
\begin{aligned}
l = \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}5\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}5\\
&= 1\cdot 5\\
&= 5, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

onde $y = 5x \to 0$ quando $x \to 0$.