Cálculo 1 - Décima Oitava Aula
Limites Exponenciais
e Introdução à Continuidade

Prof. Fabio Silva Botelho

September 11, 2017

1 Limites para funções exponenciais

Theorem 1.1. *Os seguintes limites são válidos,*

1.
$$\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0},\ \forall x_0 \in \mathbb{R},$$

2.
$$\lim_{x \to x_0} \ln(x) = \ln(x_0),\ \forall x_0 > 0,$$

onde,
$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} \approx 2.7183 \cdots .$$

Além disso, para $a > 0$, $a \neq 1$ temos que

3.
$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0},\ \forall x_0 \in \mathbb{R},$$

4.
$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0,\ \forall x_0 > 0.$$

Finalmente,

5.
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

6.
$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ \forall a > 0,\ a \neq 1.$$

Proof. Provaremos apenas os ítens 5 e 6.

Defina $y = e^x$, assim $y = e^x \to e^0 = 1$, quando $x \to 0$.

Logo,

$$\ln y = \ln(e^x) = x \ln e = x \cdot 1 = x,$$

e assim

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{\ln y} \\
&= \lim_{y \to 1} \frac{1}{\frac{1}{y-1} \ln y} \\
&= \lim_{y \to 1} \frac{1}{\ln[y^{1/(y-1)}]}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Defina $z = y - 1$, assim $y = z + 1$ e $z = y - 1 \to 0$ quando $y \to 1$ e portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to 1} \frac{1}{\ln y^{1/(y-1)}} &= \lim_{z \to 0} \frac{1}{\ln[(z+1)^{1/z}]} \\
&= \frac{1}{\ln[\lim_{z \to 0}(z+1)^{1/z}]} \\
&= \frac{1}{\ln e} \\
&= \frac{1}{1} \\
&= 1. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{e^{\ln(a^x)} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln(a)} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln(a)} - 1}{x \ln a} \ln a \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} \ln a \\
&= \ln a \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} \\
&= \ln a, \qquad (3)
\end{aligned}$$

onde

$$y = x \ln a \to 0$$

quando $x \to 0$.

A prova está completa.

$\square$

Exercício:

Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{x}.$$

$$\begin{aligned} l = \lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{5x} 5 \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{e^{y} - 1}{y} 5 \\ &= 1 \cdot 5 \\ &= 5, \end{aligned} \tag{4}$$

onde $y = 5x \to 0$ quando $x \to 0$.

Exercício: Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{7x} - 1}{e^{23x} - 1}.$$

Exercício: Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^{5x} - 1}{x}.$$

Exercício: Calcule

$$\lim_{x \to 4} \frac{e^{x} - e^{4}}{x - 4}.$$

Exercício: Seja $a \in \mathbb{R}$. Calcule

$$\lim_{x \to a} \frac{e^{x} - e^{a}}{x - a}.$$

Exercício: Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{7^{5x} - 1}{8^{9x} - 1}.$$

Exercício: Calcule
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Exercício: Calcule
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+19x)}{x}.$$

2 Funções contínuas

Definition 2.1. *Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e seja $x_0\in(a,b)$.*

Dizemos que f é contínua em x_0 quando
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Exemplo: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde
$$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & \text{se } x\geq 1\\ x^2+2, & \text{se } x<1\end{cases}$$

Verifique se f é contínua em $x_0=1$.

Observe que
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2x+1=2(1)+1=3$$
e
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2+1=1^2+2=3.$$
Assim
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-}=\lim_{x\to 1} f(x)=3=f(1).$$
Portanto f é contínua em $x_0=1$.

Exercício:

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, onde
$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-\alpha x+2}{x-2} & \text{se } x<2\\ \beta x+3, & \text{se } x\geq 2\end{cases}$$
Determine α e β tais que f seja contínua em $x=2$.

Para que $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ exista e seja real é necessário que
$$2^2-\alpha 2+2=0,$$

ou seja

$$4 - 2\alpha + 2 = 0,$$

e assim

$$\alpha = 3.$$

Observe que

$$x^2 - \alpha x + 2 = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Portanto

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} x - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Logo deve-se ter

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 = f(2),$$

Ou seja

$$\beta(2) + 3 = 1,$$

e assim,

$$\beta = -1.$$

Finalmente, observe que,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \beta x + 3 = (-1)2 + 3 = 1 = f(2).$$

Logo, $\alpha = 3$ e $\beta = -1$.

Exercício: Determine α, β e γ tais que f seja contínua em $x_0 = 3$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x-\alpha x-9}{x-3}, & \text{se } x < 3, \\ \beta, \text{ se } x = 3, \\ \gamma x + 5 + \frac{\tan(x-3)}{x-3}, \text{ se } x > 3. \end{cases}$$

3 Propriedades das funções contínuas

Theorem 3.1. *Sejam $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $x_0 \in (a,b)$.*
Sob tais hipóteses,

1. αf *é contínua em* x_0, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $f + g$ *é contínua em* x_0.
3. $f \cdot g$ *é contínua em* x_0.
4. f/g *é contínua em* x_0, *se* $g(x_0) \neq 0$.

Proof. A prova resulta das propriedades dos limites.

Por exemplo:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha f(x_0).$$

Os demais ítens são provados similarmente. $\square$