# Cálculo 1 - Funções Contínuas e Derivadas

Prof. Fabio Silva Botelho

September 12, 2017

## 1 Funções contínuas

**Definition 1.1.** *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in (a, b)$.*

*Dizemos que $f$ é contínua em $x_0$ quando*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 + 2, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Verifique se $f$ é contínua em $x_0 = 1$.

Observe que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x + 1 = 2(1) + 1 = 3$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 1^2 + 2 = 3.$$

Assim

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1).$$

Portanto $f$ é contínua em $x_0 = 1$.

Exercício:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \alpha x + 2}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ \beta x + 3, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Determine $\alpha$ e $\beta$ tais que $f$ seja contínua em $x = 2$.

Para que $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ exista e seja real é necessário que

$$2^2 - \alpha 2 + 2 = 0,$$

ou seja

$$4 - 2\alpha + 2 = 0,$$

e assim

$$\alpha = 3.$$

Observe que

$$x^2 - \alpha x + 2 = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Portanto

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} x - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Logo deve-se ter

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 = f(2),$$

Ou seja

$$\beta(2) + 3 = 1,$$

e assim,

$$\beta = -1.$$

Finalmente, observe que,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \beta x + 3 = (-1)2 + 3 = 1 = f(2).$$

Logo, $\alpha = 3$ e $\beta = -1$.

Exercício: Determine $\alpha, \beta$ e $\gamma$ tais que $f$ seja contínua em $x_0 = 3$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x-\alpha x-9}{x-3}, & \text{se } x < 3, \\ \beta, \text{ se } x = 3, \\ \gamma x + 5 + \frac{\tan(x-3)}{x-3}, \text{ se } x > 3. \end{cases}$$

# 2 Propriedades das funções contínuas

**Theorem 2.1.** *Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $x_0 \in (a, b)$.*
*Sob tais hipóteses,*

1. $\alpha f$ *é contínua em* $x_0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $f + g$ *é contínua em* $x_0$.
3. $f \cdot g$ *é contínua em* $x_0$.
4. $f/g$ *é contínua em* $x_0$, *se* $g(x_0) \neq 0$.

*Proof.* A prova resulta das propriedades dos limites.

Por exemplo:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha f(x_0).$$

Os demais ítens são provados similarmente. □

# 3 Derivadas

**Definition 3.1** (Derivadas)**.** *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função.*

*Definimos a derivada de $f$ em $x_0 \in (a,b)$, denotada por $f'(x_0)$, por*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

*quando tal limite existe.*

*Também denotamos,*

$$\frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0).$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = x^2 + 3x$.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$.

Observe que,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 3(x+h) - x^2 - 3x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h - x^2 - 3x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + 3h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2x + 3 + h = 2x + 3. \qquad (1) \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d(x^2 + 3x)}{dx} = 2x + 3.$$

# 4 Interpretação geométrica da derivada

Nesse ponto da aula, faremos uma ilustração relativa a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto, como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função em questão nesse mesmo ponto.

Assim para $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável em $x_0 \in (a, b)$, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto correspondente a $x_0$ será $f'(x_0)$.

Seja $r: \ y = ax + b$ a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Logo, deve-se ter $a = f'(x_0)$ e assim

$$r : y = f'(x_0)x + b.$$

Além disso,

$$(x_0, f(x_0)) \in r,$$

e portanto deve-se também ter:

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b,$$

isto é,

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Obtivemos então:

$$r: \ y = ax + b = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Logo

$$r: \ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Exemplo:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^2 + 3x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto correspondente a $x_0 = 1$.

Solução:

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Do último exercício,

$$f'(x) = 2x + 3.$$

Logo

$$f'(x_0) = f'(1) = 2(1) + 3 = 5.$$

Por outro lado $f(x_0) = x_0^2 + 3x_0 = 1^2 + 3(1) = 4$.

Portanto,

$$r: \ y = 5(x - 1) + 4 = 5x - 5 + 4 = 5x - 1,$$

ou seja

$$r: \ y = 5x - 1.$$

# 5 Regras de Derivação

**Theorem 5.1.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde*

$$f(x) = x^n$$

*e onde $n \in \mathbb{N}$.*

*Sob tais hipóteses*

$$f'(x) = nx^{n-1},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Proof.* Denotemos

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

onde $n! = 1 \cdot 2 \cdots n,\ \ k! = 1 \cdot 2 \cdots k,\ \ 0! = 1\ $ e $1! = 1$.

Assim

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} h^k - x^n}{h}, \end{aligned} \tag{2}$$

onde,

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1$$

e

$$\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n.$$

Logo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \mathcal{O}(h^2) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} nx^{n-1} + \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h} \\ &= nx^{n-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

onde

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h} = 0.$$

Resumindo,

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Observação: Pode-se provar que para

$$f(x) = x^r, \ \forall x \geq 0, r \in \mathbb{R}, \ r \neq 0,$$

temos que

$$f'(x) = rx^{r-1}.$$

Exemplo:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obtenha $f'(x)$. Obtenha também a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto correspondente a $x_0 = 1$.

$$r : \ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

$$f'(x) = 4x^3,$$

Logo

$$f'(x_0) = f'(1) = 4(1)^3 = 4.$$

Por outro lado $f(x_0) = x_0^4 = 1^4 = 1$.

Logo

$$r : \ y = 4(x - 1) + 1 = 4x - 4 + 1 = 4x - 3,$$

ou seja

$$r : y = 4x - 3.$$

**Theorem 5.2** (Regras de Derivação)**.** *Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x \in (a, b)$.*

*Sob tais hipóteses,*

1. $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
4. $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \quad \text{se } g(x) \neq 0.$$

*Proof.* A prova desse teorema será feita na forma de exercícios. □

Exemplo: Seja

$$f(x) = (x^7 + 2x^5 + 3)(x^3 + 6x^2 + 3x).$$

Calcule $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^7+2x^5+3)'(x^3+6x^2+3x)+(x^7+2x^5+3)(x^3+6x^2+3x)' \\ &= (7x^6+10x^4)(x^3+6x^2+3x)+(x^7+2x^5+3)(3x^2+12x+3). \end{aligned} \tag{4}$$

Exercício: Seja

$$f(x) = \frac{x^3+2x}{x^4+3x^2+1}.$$

Calcule $f'(x)$.

**Theorem 5.3.** *Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função e seja $x_0\in(a,b)$ tal que $f'(x_0)$ existe. Sob tais hipóteses, $f$ é contínua em $x_0$.*

*Proof.* Seja $\varepsilon = 1$. De

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

existe $\delta > 0$ tal que se $0<|h|<\delta$ então

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| < \varepsilon = 1,$$

e assim

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| - |f'(x_0)| < 1,$$

isto é,

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| < 1+|f'(x_0)|,$$

ou seja,

$$0 \le |f(x_0+h)-f(x_0)| < (1+|f'(x_0)|)|h|. \tag{5}$$

Como

$$\lim_{h\to 0}(1+|f'(x_0)|)|h| = 0,$$

disto, (5) e do teorema do confronto, obtemos,

$$\lim_{h\to 0}|f(x_0+h)-f(x_0)| = 0,$$

ou seja

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0).$$

Disto podemos concluir que $f$ é continua em $x_0$. $\square$

Exercício: Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x \in (a, b)$.
Prove que

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \qquad (6)
\end{aligned}$$

A solução está completa.