Cálculo 1 - Segunda Aula- Conjuntos Numéricos

Prof. Fabio Silva Botelho

July 28, 2017

1 O corpo real

Pode-se provar a existência de um conjunto, chamado corpo real, denotado por $\mathbb{R}$, para o qual estão definidas uma operação de soma $(+) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma operação de multiplicação, denotada por $(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para as quais valem as seguintes propriedades:

Axiomas da soma:

1. $x + y = y + x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$,

2. $(x + y) + z = x + (y + z), \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

3. existe um elemento real denotado por $0 \in \mathbb{R}$ tal que
$$x + 0 = 0 + x = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. para cada $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que
$$x + y = y + x = 0,$$
onde denotamos
$$y = -x.$$

Axiomas da multiplicação:

1. $x \cdot y = y \cdot x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$,

2. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

3. existe um elemento real denotado por $1 \in \mathbb{R}$ tal que
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$, existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que
$$x \cdot y = y \cdot x = 1,$$
onde denotamos
$$y = \frac{1}{x}.$$

Lei distributiva

1. $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z, \; \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

2 O conjunto natural

Contido no corpo real, temos o conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$ e definido por

$$\mathbb{N} = \{1, 1+1, (1+1)+1, \cdots\}.$$

O conjuntos dos naturais é caracterizado pelo princípio da indução, a saber:
Princípio da indução:
Assuma que

1. $B \subset \mathbb{N}$,
2. $1 \in B$
3. e vale a seguinte propriedade:

$$\text{se } n \in B, \;\; \text{então } n+1 \in B.$$

Sob tais hipóteses,

$$B = \mathbb{N}.$$

Observe que

$$\mathbb{N} = \{1, 1+1, (1+1)+1, \cdots\},$$

onde denotamos,

$$1+1 = 2,$$

$$(1+1)+1 = 3, \; etc...$$

e assim

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}.$$

3 O conjunto dos números inteiros

O conjunto dos números inteiros, denotado por $\mathbb{Z}$ é definido por,

$$\mathbb{Z} = \{0, -n, n \; : \; n \in \mathbb{N}\}.$$

Logo

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

4 O conjunto dos números racionais

Tal conjunto, denotado por $\mathbb{Q}$, é definido por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ m \cdot \frac{1}{n},\ m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aqui denotamos,

$$a = m \cdot \frac{1}{n} \equiv \frac{m}{n} \Leftrightarrow n \cdot a = m.$$

Observe que

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}.$$

5 Conjuntos dos números irracionais

Um número $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin \mathbb{Q}$ é dito ser um número irracional.
Logo, definimos o conjunto dao números irracionais, denotado por $\mathbb{I}$, por

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \notin \mathbb{Q}\}.$$

São exemplos de números irracionais $\sqrt{2}, \pi, e, \sqrt{p}$, onde $p > 1$ é primo, etc...

5.1 Propriedades dos números irracionais

Para os números irracionais valem as seguintes propriedades:

1. Sejam $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{I}$.

   Sob tais hipóteses
   $$x + y \in \mathbb{I}.$$

2. Sejam $x \in \mathbb{Q}$ onde $x \neq 0$ e $y \in \mathbb{I}$.

   Sob tais hipóteses,
   $$x \cdot y \in \mathbb{I}.$$

Exercício: Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ e seja $p > 0$ um número primo.
Suponha que,

$$a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p}.$$

Prove que $a = c$ e $b = d$.

6 Representação decimal

Um número racional α, ou seja uma fração real, pode ser representada por uma decimal exata na forma:

$$\alpha = a_1, d_1 d_2 \cdots d_n = a_1 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_n}{10^n},$$

onde $a_1 \in \mathbb{Z}$ e $d_k \in \{0, 1, 2, \cdots 9\}, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$, onde $n \in \mathbb{N}$, ou por uma dízima periódica, isto é, uma decimal com infinitos termos que se repetem periodicamente.

Exemplo:

$$\frac{1}{3} = 0.3333 \cdots = 0.\overline{3} \text{ periodo } 3,$$

$$\frac{2}{7} = 0.285714\,285414 \cdots = 0.\overline{285714}, \text{ período } 285714.$$

Quando a decimal é exata, a obtenção da fração que a gerou é imediata, por exemplo:

$$0.54 = \frac{54}{100},$$

$$2.710 = \frac{2710}{1000}.$$

No caso de uma dízima periódica, temos que procurar pela fração que a gerou:

Vejamos o exemplo:

$$\alpha = 0.7777 \cdots = 0.\overline{7}.$$

Logo,

$$\alpha = 0.777 \cdots,$$

$$10\alpha = 7.777 \cdots,$$

ou seja,

$$10\alpha - \alpha = 7,$$

isto é,

$$9\alpha = 7$$

e assim,

$$\alpha = \frac{7}{9}.$$

Vejamos este outro exemplo:

$$\alpha = 6.434343 \cdots$$

Logo,

$$\alpha = 6.434343 \cdots$$

$$100\alpha = 643.434343\cdots$$

Portanto,

$$100\alpha - \alpha = 637,$$

ou seja,

$$99\alpha = 637,$$

isto é,

$$\alpha = \frac{637}{99}.$$

Exercício: Escreva α na forma de uma fração, onde

$$\alpha = 7.191919\cdots + \frac{3.868686\cdots - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{7}{5}}.$$