Cálculo 1 - Vigésima Aula
Regras de Derivação
e Derivadas de Funções Trigonométricas

Prof. Fabio Silva Botelho

September 15, 2017

1 Regras de Derivação

Theorem 1.1 (Regras de Derivação)**.** *Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x \in (a, b)$. Sob tais hipóteses,*

1. $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
4. $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \quad se\ g(x) \neq 0.$$

Proof. A prova desse teorema será feita na forma de exercícios. □

Exemplo: Seja
$$f(x) = (x^8 + 9x^2 + 5x)(7x^8 + 9x + 1).$$
Calcule $f'(x)$.

Exercício: Seja
$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^4 + x + 7}.$$
Calcule $f'(x)$.

Theorem 1.2. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0)$ existe. Sob tais hipóteses, f é contínua em x_0.*

Proof. Seja $\varepsilon = 1$. De

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |h| < \delta$ então

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon = 1,$$

e assim

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| - |f'(x_0)| < 1,$$

isto é,

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| < 1 + |f'(x_0)|,$$

ou seja,

$$0 \leq |f(x_0 + h) - f(x_0)| < (1 + |f'(x_0)|)|h|. \tag{1}$$

Como

$$\lim_{h \to 0} (1 + |f'(x_0)|)|h| = 0,$$

disto, (1) e do teorema do confronto, obtemos,

$$\lim_{h \to 0} |f(x_0 + h) - f(x_0)| = 0,$$

ou seja

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Disto podemos concluir que f é continua em x_0. □

Exercício: Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x \in (a, b)$.
Prove que

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \qquad (2)
\end{aligned}$$

A solução está completa.

2 Derivadas de funções trigonométricas

Theorem 2.1. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que*

$$f(x) = sen(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$g(x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Seja $x \in \mathbb{R}$.
Sob tais hipóteses,

$$f'(x) = \frac{dsen(x)}{dx} = \cos(x),$$

e

$$g'(x) = \frac{d\cos(x)}{dx} = -sen(x).$$

Proof. Seja $x \in \mathbb{R}$.
Primeiramente, relembremos a identidade trigonométrica:

$$\text{sen}(x) - \text{sen}(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+h/2)\text{sen}(h/2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+h/2)\text{sen}(h/2)}{2h/2}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos(x+h/2)\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(h/2)}{h/2}\\
&= \cos x. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Com o auxílio da identidade

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

podemos também provar que

$$\frac{d\cos(x)}{dx} = -\text{sen}(x).$$

Deixamos os detalhes dessa parte da prova como exercício. □

Exercício: Calcule $f'(x)$ para

$$f(x) = x^3 \mathrm{sen}(x).$$

Exercício: Calcule $f'(x)$ para

$$f(x) = \frac{\cos(x) + 3x^5}{3 + x^4 + \mathrm{sen}(x)}.$$

Exercício: Seja $f(x) = \tan(x)$. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x \neq 0$.
Calcule $f'(x)$.

Exercício: Seja $f(x) = \sec(x)$. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x \neq 0$.
Calcule $f'(x)$.

Exercício: Seja $f(x) = \csc(x)$. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{sen} x \neq 0$.
Calcule $f'(x)$.

Exercício: Seja

$$f(x) = \mathrm{sen}(x) + \tan(x)x^2.$$

Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto correspondente a

$$x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercício: Seja

$$f(x) = \frac{1}{\cos x + 3}.$$

Obtenha a equações das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto correspondente a

$$x_0 = \frac{\pi}{2}.$$