Cálculo - 1 - Vigésima Primeira Aula
Regra da Cadeia

Prof. Fabio Silva Botelho

September 19, 2017

1 Regra da Cadeia

Theorem 1.1. *Sejam $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ funções.*

Seja $x_0 \in (a, b)$. Assuma que $f'(x_0)$ existe e que $g'(y_0)$ existe, onde $y_0 = f(x_0) \in (c, d)$.

Sob tais hipóteses, temos que,

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Aqui,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x \in (a, b),\ \text{tal que } f(x) \in (c, d).$$

Proof. Defina

$$H(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} - g'(y_0), & \text{se } y \neq y_0 \\ 0, & \text{se } y = y_0 \end{cases},$$

Assim

$$H(y) \to g'(y_0) - g'(y_0) = 0,\ \text{quando } y \to y_0.$$

Observe que

$$g(y) - g(y_0) = (g'(y_0) + H(y))(y - y_0).$$

Logo, para $y = f(x_0 + h)$, obtemos

$$y = f(x_0 + h) \to f(x_0) = y_0,\ \text{quando } h \to 0,$$

ou seja $H(f(x_0 + h)) \to 0,$ quando $h \to 0.$

Logo,

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = [g'(y_0) + H(f(x_0 + h))](f(x_0 + h) - f(x_0)),$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} &= [g'(y_0) + H(f(x_0 + h))]\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &\to g'(y_0)f'(x_0),\ \text{quando } h \to 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Resumindo,

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = g'(y_0) f'(x_0).$$

□

Exemplo:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = (x^3 + 5x^2 + 1)^{10}.$$

Calcule $f'(x)$.

Observe que

$$f(x) = g(h(x)),$$

onde a função externa é $g(y) = y^{10}$ e a função interna é $h(x) = x^3 + 5x^2 + 1$

Assim

$$g'(y) = 10y^9.$$

Da regra da cadeia

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 10[h(x)]^9 h'(x),$$

ou seja

$$f'(x) = 10(x^3 + 5x^2 + 1)^9 (x^3 + 5x^2 + 1)' = 10(x^3 + 5x^2 + 1)^9 (3x^2 + 10x).$$

Exercicio: Seja $f(x) = (\sin(x) + \tan(x))^5$.

Obtenha $f'(x)$.

$$f'(x) = 5(\sin(x) + \tan(x))^4 (\sin(x) + \tan(x))' = 5(\sin(x) + \tan(x))^4 (\cos(x) + \sec^2(x)).$$

Theorem 1.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = e^x$.*

Seja $x \in \mathbb{R}$. Sob tais hipóteses

$$f'(x) = \frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Proof.

$$\begin{aligned} \frac{de^x}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x. \end{aligned} \tag{2}$$

Resumindo,

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

$\square$

Exemplo:
Seja $f(x) = e^{5x^2+3x}$. Calcule $f'(x)$.
$f(x) = e^{g(x)}$, onde $g(x) = 5x^2 + 3x$.
Da regra da cadeia,

$$f'(x) = e^{g(x)} g'(x),$$

$$f'(x) = e^{5x^2+3x}(5x^2 + 3x)' = e^{5x^2+3x}(10x + 3).$$

Exercício: Seja $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, onde $a > 0$, $a \neq 1$.
Calcule $f'(x)$.
Observe que

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln a}.$$

Logo da regra da cadeia,

$$f'(x) = \left(e^{x \ln(a)}\right)' = e^{x \ln(a)}(x \ln(a))' = a^x \ln(a).$$

Logo

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln(a).$$

Exemplo:
Seja

$$f(x) = 5^{3x^2+9x}.$$

Calcule $f'(x)$.

$$f'(x) = 5^{3x^2+9x}(\ln 5)(3x^2 + 9x)' = 5^{3x^2+9x}(\ln 5)(6x + 9).$$

Exercício: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = e^{\sin(x)}.$$

Obtenha a equação da reta r tangente ao gráfico de f no ponto correspondente a $x_0 = \pi$.

$$r : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

$$f'(x) = \left(e^{\sin(x)}\right)' = e^{\sin(x)}(\sin(x))' = e^{\sin(x)} \cos(x).$$

$$f'(x_0) = f'(\pi) = e^{\sin(\pi)} \cos(\pi) = e^0(-1) = -1.$$

$$f(x_0) = e^{\sin(\pi)} = e^0 = 1.$$

Logo

$$r : y = -1(x - \pi) + 1 = -x + \pi + 1,$$

ou seja

$$r \ : \ y = -x + \pi + 1.$$