Cálculo - 1 - Vigésima Terceira Aula
Funções Trigonométricas Inversas

Prof. Fabio Silva Botelho

September 25, 2017

1 Funções trigonométricas inversas

1.1 Função Arco-seno

Seja $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ onde $f(x) = \text{ sen } (x)$.

Tal função é bijetiva e admite uma inversa denotada por $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ e definida por

$$y = f(x) = \text{ sen } x \Leftrightarrow x = \text{arc sen } y = f^{-1}(y).$$

Assim

$$f^{-1}(x) = \text{ arc sen } x.$$

Denotemos,

$$y(x) = \text{ arc sen } x.$$

Logo

$$x = \text{ sen } y(x).$$

Assumindo que $y'(x)$ existe, da regra da cadeia, obtemos,

$$1 = \frac{dx}{dx} = (\text{ sen} y(x))' = \cos y(x) y'(x),$$

ou seja,

$$y'(x) = \frac{1}{\cos y(x)}.$$

Entretanto, de

$$\text{sen}^2 y(x) + \cos^2 y(x) = 1,$$

obtemos,

$$\cos y(x) = \sqrt{1 - \text{ sen}^2 y(x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Conclui-se então que

$$y'(x) = \frac{1}{\cos y(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

isto é,

$$\frac{d\ \text{arcsen}\ x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$.

1.2 Função Arco-cosseno

Similarmente, a função $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, onde

$$f(x) = \cos x$$

é também bijetiva.

Assim f admite uma inversa $f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, definida por

$$y = f(x) = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y = f^{-1}(y),\ \forall x \in [0, \pi],\ y \in [-1, 1].$$

Portanto,

$$f^{-1}(x) = \arccos x,\ \forall x \in [-1, 1].$$

Denotando

$$y(x) = \arccos x$$

temos que

$$x = \cos y(x).$$

Assumindo que $y'(x)$ existe, da regra da cadeia, obtemos

$$1 = \frac{dx}{dx} = \frac{d \cos y(x)}{dx} = -\ \text{sen}\ y(x)y'(x),$$

isto é,

$$y'(x) = -\frac{1}{\text{sen}\ y(x)}.$$

Observe que

$$\text{sen}^2 y(x) + \cos^2 y(x) = 1,$$

ou seja, no domínio em questão,

$$\text{sen}\ y(x) = \sqrt{1 - \cos^2 y(x)}.$$

Portanto

$$y'(x) = -\frac{1}{\text{sen}\ y(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$.

Exercício: Seja

$$f(x) = \text{arcsen } (x^2 - x/3).$$

Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto correspondente à $x_0 = 1$.

Solução:

$$r: \; y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Observe que

$$f(x) = \text{ arcsen } h(x),$$

onde

$$h(x) = x^2 - x/3.$$

Da regra da cadeia,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - h(x)^2}} h'(x),$$

ou seja

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 - x/3)^2}} (x^2 - x/3)' = \frac{2x - 1/3}{\sqrt{1 - (x^2 - x/3)^2}}.$$

Logo

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{2 - 1/3}{\sqrt{1 - (1^2 - 1/3)^2}} = \frac{5/3}{\sqrt{1 - 4/9}} = \frac{5/3}{\sqrt{5}/3} = \sqrt{5}.$$

E também

$$f(x_0) = f(1) = \text{arcsen } (1^2 - 1/3) = \text{ arcsen } (2/3).$$

Logo,

$$r: \; y = \sqrt{5}(x - 1) + \text{ arcsen } (2/3).$$

Exercício: Seja

$$f(x) = \arccos(x^3 + \ln x).$$

Obtenha $f'(x)$.

Exercício: Seja

$$f(x) = \ln(\text{arcsen } x) e^{\arccos x^2}.$$

Obtenha $f'(x)$.

1.3 Função Arco-tangente

Seja $f:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$ onde

$$f(x)=\tan x.$$

Observe que como f é bijetiva, admite uma inversa $f^{-1}:\mathbb{R}\to(-\pi/2,\pi/2)$, tal que

$$y=f(x)=\tan x \Leftrightarrow x=\arctan y=f^{-1}(y),\ \forall x\in(\pi/2,\pi/2),\ y\in\mathbb{R}.$$

Ou seja

$$f^{-1}(x)=\arctan x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Denotando

$$y(x)=\arctan x$$

obtemos,

$$x=\tan y(x).$$

Assim, assumindo que $y'(x)$ existe, da regra da cadeia, obtemos

$$1=\frac{dx}{dx}=\frac{d\tan y(x)}{dx}=\sec^2 y(x)y'(x),$$

isto é,

$$y'(x)=\frac{1}{\sec^2(y(x))}.$$

Entretanto

$$\sec^2 y(x)=1+\tan^2 y(x).$$

Logo disto e do exposto acima, obtemos

$$y'(x)=\frac{1}{\sec^2(y(x))}=\frac{1}{1+\tan^2 y(x)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Resumindo,

$$\frac{d\arctan x}{dx}=\frac{1}{1+x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Exercício: Seja

$$f(x)=\arctan(x^9+\ln(x^8+3x)).$$

Obtenha $f'(x)$.

Exercício: Seja

$$f(x)=\arctan(x^2+1).$$

Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto correspondente a $x_0=1$.

1.4 Funções arco-secante e arco-cossecante

Seja $f : [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi] \to \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$,
onde

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Tal função é bijetiva e admite uma inversa

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \to [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$$

definida por

$$y = f(x) = \sec x \Leftrightarrow x = \text{ arcsec } y = f^{-1}(y),$$

ou seja

$$f^{-1}(x) = \text{arcsec } x, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1).$$

Denotando

$$y(x) = \text{ arcsec } x,$$

Obtemos,

$$x = \sec y(x).$$

Assim, assumindo que $y'(x)$ existe, da regra da cadeia, obtemos

$$1 = \frac{dx}{dx} = \frac{d \sec y(x)}{dx} = \sec y(x) \tan y(x) y'(x),$$

isto é,

$$y'(x) = \frac{1}{\sec y(x) \tan y(x)} = \frac{1}{\sec y(x) \sqrt{\sec^2 y(x) - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Resumindo,

$$\frac{d \text{ arcsec } x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, \ \forall x \text{ tal que } |x| > 1.$$

Similarmente considere $f : [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2] \to \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$,
onde

$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\text{sen } x}.$$

Tal função é bijetiva e admite uma inversa

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \to [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$$

definida por

$$y = f(x) = \csc x \Leftrightarrow x = \text{arccsc } y = f^{-1}(y),$$

ou seja

$$f^{-1}(x) = \text{ arccsc } x, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1).$$

Denotando

$$y(x) = \text{ arccsc } x$$

Obtemos,

$$x = \csc y(x).$$

Assim, assumindo que $y'(x)$ existe, da regra da cadeia, obtemos

$$1 = \frac{dx}{dx} = \frac{d \csc y(x)}{dx} = -\csc y(x) \cot y(x) y'(x),$$

isto é, relembrando a identidade

$$\csc^2 y(x) = 1 + \cot^2 y(x)$$

de onde,

$$\cot y(x) = \sqrt{\csc^2 y(x) - 1},$$

obtemos

$$y'(x) = -\frac{1}{\csc y(x) \cot y(x)} = -\frac{1}{\csc y(x) \sqrt{\csc^2 y(x) - 1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Resumindo,

$$\frac{d \text{ arccsc } x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \; \forall x \text{ tal que } |x| > 1.$$