Cálculo - 1 - Derivada da Função Inversa, Extremos Relativos e Globais

Prof. Fabio Silva Botelho

October 11, 2017

1 Derivada da Função Inversa

Theorem 1.1. *Seja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivável em* (a, b)
e tal que

$$f'(x_0) \neq 0,$$

onde $x_0 \in (a, b)$.

Sob tais hipóteses f *admite uma inversa local numa vizinhança*

$$V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

para algum $\delta > 0$.
Além disso, f^{-1} *é derivável em* $y_0 = f(x_0)$ *e*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Aqui f^{-1} *é definida por:*

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \forall x \in V_\delta(x_0).$$

Proof. Provaremos apenas a segunda parte.
Da hipótese

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0.$$

Denotemos, conforme acima indicado,

$$y_0 = f(x_0),$$

e para $x \in V_\delta(x_0)$, $y = f(x)$ e

$$x = f^{-1}(y).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f'(x_0)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\
&= (f^{-1})'(y_0). \qquad (1)
\end{aligned}$$

A prova está completa. $\square$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = e^x$.

Assim $y = e^x$, logo

$$\ln(y) = \ln(e^x) = x \ln(e) = x,$$

ou seja

$$x = \ln(y) = f^{-1}(y).$$

Do último teorema,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Portanto,

$$\frac{d \ln(y)}{dy} = \frac{1}{y}.$$

Exercício: Seja $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Obtenha $f^{-1}(y)$.

Calcule $(f^{-1})'(y)$ diretamente e usando o último teorema. Compare os resultados.

$$y = \sqrt{x+1},$$

logo

$$y^2 = x + 1,$$

ou seja

$$x = y^2 - 1 = f^{-1}(y).$$

Assim, diretamente

$$(f^{-1})'(y) = 2y.$$

Pelo último teorema,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

onde,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

Logo,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = 2\sqrt{x+1} = 2y.$$

Portanto os resultados coincidem, conforme esperado.

Exercício: Seja $f(x) = x^r$, $\forall x > 0$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$.

Calcule $f'(x)$.

$$f(x) = x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r\ln(x)},$$

logo

$$f'(x) = \left[e^{r\ln(x)}\right]' = e^{r\ln(x)}(r\ln(x))' = e^{r\ln(x)}\frac{r}{x} = rx^r/x = rx^{r-1}.$$

2 Teorema do Valor Intermediário

Theorem 2.1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$.*

Suponha que

$$f(a) < f(b).$$

Seja

$$d \in (f(a), f(b)).$$

Sob tais hipóteses, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(c) = d.$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2.$$

Mostre que existe $c \in (1,2)$ tal que

$$f(c) = 0$$

De fato,

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0,$$

e

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0.$$

Logo,

$$f(1) < 0 < f(2).$$

Como f é contínua em $\mathbb{R}$, do Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (1,2)$ tal que

$$f(c) = 0.$$

Exercício: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^2 + 10\cos(x).$$

Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(c) = 1000.$$

Exercício: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^3 + \frac{(x+1)\cos(x)}{x^2+1}.$$

Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(c) = 0.$$

3 Extremos locais e globais

Definition 3.1 (Mínimo local e mínimo global)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $x_0 \in [a,b]$ é um ponto de mínimo local para f em $[a,b]$, se existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in [a,b] \cap V_\delta(x_0),$$

onde $V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Dizemos que $x_0 \in [a,b]$ é um ponto de mínimo global para f em $[a,b]$ quando

$$f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in [a,b].$$

Definition 3.2 (Máximo local e máximo global)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $x_0 \in [a,b]$ é um ponto de máximo local para f em $[a,b]$, se existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in [a,b] \cap V_\delta(x_0),$$

onde $V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Dizemos que $x_0 \in [a,b]$ é um ponto de máximo global para f em $[a,b]$ quando

$$f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in [a,b].$$

Theorem 3.3. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que $x_0 \in (a,b)$ é um ponto de mínimo ou máximo local para f e que $f'(x_0)$ exista.*

Sob tai hipóteses,

$$f'(x_0) = 0.$$

Proof. Assuma que x_0 é ponto de mínimo local para f.

Logo existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(x_0), \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \equiv V_\delta(x_0).$$

Seja $0 < h < \delta$.
Assim

$$f(x_0 + h) \geq f(x_0),$$

ou seja

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0,$$

isto é

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Fazendo $h \to 0^+$ obtemos,

$$f'(x_0) \geq 0. \tag{2}$$

Similarmente, seja $-\delta < h < 0$.
Assim

$$f(x_0 + h) \geq f(x_0),$$

ou seja

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0,$$

isto é

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Fazendo $h \to 0^-$ obtemos,

$$f'(x_0) \leq 0. \tag{3}$$

De (2) e (3) obtemos,

$$f'(x_0) = 0.$$

A prova está completa.

$\square$

Definition 3.4 (Pontos críticos)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Dizemos que $x_0 \in (a, b)$ é um ponto crítico de f se*

$$f'(x_0) = 0,$$

ou se $f'(x_0)$ não existe.

Exercício: Obtenha os pontos críticos de

$$f(x) = x^{3/5}(4 - x).$$