Cálculo 1 - Complementos sobre Extremos e o Teorema do Valor Médio e Aplicações

Prof. Fabio Silva Botelho

October 18, 2017

1 Complementos sobre Extremos

Provamos na última aula, o seguinte teorema:

Theorem 1.1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que $x_0 \in (a, b)$ é um ponto de mínimo ou máximo local para f e que $f'(x_0)$ exista.*

Sob tais hipóteses,

$$f'(x_0) = 0.$$

1.1 Teorema de Weierstrass

Theorem 1.2 (Weierstrass)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$.*

Sob tais hipóteses, existem $x_1 \in [a, b]$ e $x_2 \in [a, b]$ tais que

$$f(x_1) = \min\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\},$$

e

$$f(x_2) = \max\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\}.$$

Observação: Aqui enfatizamos que o intervalo $[a, b]$ é fechado. Por exemplo para o caso $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

temos que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Ou seja, nesse caso onde $(0, 1]$ não é fechado, o Teorema de Weierstrass não vale.

1.2 O método do intervalo fechado

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$.

Assim, do Teorema de Weierstrass, f atingirá o seus valores máximo e mínimo em $[a, b]$.

Para obtermos os pontos de máximo e mínimo globais de f em $[a, b]$, utilizaremos o método do intervalo fechado, o qual é resumido pelos seguintes passos:

1. Encontre os pontos críticos de f em (a, b).

2. Obtenha $f(a)$ e $f(b)$.

3. O valor máximo de f será o maior valor entre os valores nos pontos críticos e os valores $f(a)$ e $f(b)$.

4. O valor mínimo de f será o menor valor entre os valores nos pontos críticos e os valores $f(a)$ e $f(b)$.

Exemplo: Seja $f : [-1/2, 4] \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Obtenha os valores máximo e mínimo de f em $[-1/2, 4]$.

Obtenhamos primeiramente, os pontos críticos.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

Logo,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Portanto, os pontos críticos de f são $x = 0$ e $x = 2$.

Observe que, do método do intervalo fechado,

$$\max\{f(x),\ x \in [-1/2, 4]\} = \max\{f(0), f(2), f(-1/2), f(4)\},$$

onde

$$f(0) = 1,$$
$$f(2) = -3,$$
$$f(-1/2) = 1/8$$

e

$$f(4) = 17.$$

Portanto,

$$\max\{f(x),\ x \in [-1/2, 4]\} = \max\{1, -3, 1/8, 17\} = 17.$$

O valor máximo ocorre em $x = 4$.

E também,

$$\min\{f(x),\ x \in [-1/2, 4]\} = \min\{f(0), f(2), f(-1/2), f(4)\},$$

isto é,

$$\min\{f(x),\ x \in [-1/2, 4]\} = \min\{1, -3, 1/8, 17\} = -3.$$

O valor mínimo ocorre em $x = 2$.

2 O Teorema do Valor Médio

Theorem 2.1 (Rolle)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a,b).*
Suponha que $f(a) = f(b)$. Sob tais hipóteses, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Proof. Do teorema de Weierstrass f atinge o seu máximo e o seu mínimo em $[a, b]$.

Há duas possibilidades, ou f é constante, e nesse caso $f'(x) = 0, \ \forall x \in (a, b)$, ou f atinge um ponto de máximo ou mínimo em um ponto x_0 no interior (a, b), e nesse caso

$$f'(x_0) = 0.$$

A prova está completa. □

Theorem 2.2 (Teorema do valor médio)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).*
Sob tais hipóteses, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Proof. Defina $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{(f(b) - f(a))}{b - a}(x - a).$$

Observe que h é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e também

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Do Teorema de Rolle, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$h'(x_0) = 0,$$

ou seja,

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

e portanto,

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A prova está completa. □

Exemplo: Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = x^3 - x.$$

Obtenha $x_0 \in (0, 2)$ tal que a conclusão do teorema do valor médio é válida em $[0, 2]$.
$f'(x) = 3x^2 - 1.$

Devemos obter $x_0 \in (0, 2)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0},$$

onde

$$f(2) = 2^3 - 2 = 6 \text{ e } f(0) = 0.$$

Portanto, deve-se ter:

$$f'(x_0) = 3x_0^2 - 1 = \frac{6 - 0}{2 - 0} = 3,$$

Ou seja

$$3x_0^2 - 1 = 3,$$

e portanto

$$x_0 = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Logo $x_0 = \sqrt{\frac{4}{3}} \in (0, 2)$ é a solução.

Exercicio:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = 7 - 12x + 3x^2.$$

Encontre $x_0 \in (1, 3)$ tal que a conclusão do Teorema do valor médio é válida em $[1, 3]$.

3 Aplicações do teorema do valor médio

Theorem 3.1. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$.*

Sob tais hipóteses f é crescente em (a, b), isto é, se x_1, $x_2 \in (a, b)$ e $x_2 > x_1$ então $f(x_2) > f(x_1)$.

Por outro lado se $f'(x) < 0$ em (a, b), então f é decrescente em (a, b), isto é, se x_1, $x_2 \in (a, b)$ e $x_2 > x_1$ então $f(x_2) < f(x_1)$.

Proof. Assuma $f'(x) > 0$ em (a, b). Sejam $x_1, x_2 \in (a, b)$ tais que $x_2 > x_1$.

Do teorema do valor médio, existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) > 0,$$

ou seja

$$f(x_2) > f(x_1).$$

A segunda parte é provada similarmente. □

3.1 Teste da primeira derivada

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$.

Suponha que $x_0 \in (a, b)$ seja um ponto crítico de f tal que $f'(x)$ exista em $(x_0, -\delta, x_0 + \delta)$ exceto possivelmente em x_0, para algum $\delta > 0$.

1. Nesse caso, se a derivada $f'(x)$ passa de um valor negativo à esquerda de x_0 para um valor positivo à direita de x_0, então x_0 é um ponto de mínimo local para f.

2. Se a derivada $f'(x)$ passa de um valor positivo à esquerda de x_0 para um valor negativo à direita de x_0, então x_0 é um ponto de máximo local para f.

3. Se a derivada $f'(x)$ não muda o sinal numa vizinhança de x_0, conservando-se positiva (ou negativa) em $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, então x_0 não é ponto de extremo local para f.

Exercício: Encontre onde $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e onde f é decrescente.
Obtenha e classifique os pontos críticos de f de acordo o teste da primeira derivada.