Cálculo 1 - Teorema de Taylor e o Teste da Segunda Derivada

Prof. Fabio Silva Botelho

October 18, 2017

1 Fórmula de Taylor de Segunda Ordem

Theorem 1.1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que f' seja contínua em (a,b) e f'' exista em (a,b), onde*

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},\ \forall x \in (a,b).$$

Sejam $x_0 \in (a,b)$ e $x \in (a,b)$ tais que $x_0 \neq x$. Sob tais hipóteses, existe $\tilde{x}$ entre x e x_0 tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\tilde{x})}{2}(x - x_0)^2.$$

Proof. Seja

$$P(t) = f(x_0) + f'(x_0)(t - x_0)$$

o polinômio de Taylor de primeira ordem de f.

Defina

$$M = \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^2/2} \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Defina também

$$g(t) = f(t) - P(t) - M\frac{(t - x_0)^2}{2}.$$

Observe que

$$g(x_0) = 0 = g(x).$$

Do Teorema de Rolle, existe x_1 entre x_0 e x tal que

$$g'(x_1) = 0.$$

Observe tambem que

$$g'(x_0) = f'(x_0) - P'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Portanto, do Teorema de Rolle existe $\tilde{x}$ entre x_0 e x_1 tal que

$$g''(\tilde{x}) = 0,$$

ou seja,

$$g''(\tilde{x}) = f''(\tilde{x}) - M = 0.$$

Portanto,

$$M = f''(\tilde{x}). \tag{2}$$

De (1) obtemos,

$$f(x) = P(x) + M(x - x_0)^2/2$$

isto é, disto e (2) temos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\tilde{x})(x - x_0)^2.$$

A prova está completa. □

2 Classificação dos pontos críticos, teste da segunda derivada

Theorem 2.1. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que f' e f'' sejam contínuas em (a, b).*
Assuma que $f'(x_0) = 0$ onde $x_0 \in (a, b)$.
Sob tais hipóteses,

1. *Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é um ponto de mínimo local para f.*
2. *Se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é um ponto de máximo local para f.*
3. *Se $f''(x_0) = 0$, nada podemos afirmar.*

Proof. Provaremos apenas o item 1. A prova dos demais ítens é deixada como exercício.
Assuma $f''(x_0) > 0$. Observe que existe $\delta > 0$ tal que $f''(x) > 0$ em $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Seja $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $x \neq x_0$. Logo do teorema de Taylor, existe $\tilde{x}$ entre x_0 e x tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\tilde{x})}{2}(x - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + \frac{f''(\tilde{x})}{2}(x - x_0)^2 \\ &\geq f(x_0), \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Resumindo,

$$f(x) \geq f(x_0), \ \forall x \in (x_0, -\delta, x_0 + \delta).$$

Portanto, x_0 é ponto de mímino local para f.
A prova está completa.

□

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x.$$

Determine onde f é crescente e onde f é decrescente.

Obtenha e classifique os pontos críticos de f de acordo com o teste da segunda derivada.

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$.

Logo, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$, ou seja , se

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

ou seja, se $x = -3$ ou $x = 2$.

Logo $f'(x) > 0$ (f crescente) em $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

E, $f'(x) < 0$ (f decrescente) em $(-3, 2)$.

Por outro lado,

$$f''(x) = 12x + 6.$$

Portanto

$$f''(-3) = 12(-3) + 6 = -30 < 0$$

logo $x = -3$ é ponto de máximo local para f.

E,

$$f''(2) = 12(2) + 6 = 30 > 0$$

logo $x = 2$ é ponto de mínimo local para f.