Cálculo 1 - Fórmula de Taylor
e Esboço do Gráfico de Funções Reais

Prof. Fabio Silva Botelho

October 20, 2017

1 Fórmula de Taylor, o caso geral

1.1 Derivadas de ordem mais alta

Definition 1.1. *Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x)$ existe em (a,b). Definimos a segunda derivada de f em x, denotada por $f''(x)$, por*

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

quando tal limite existe. Raciocinando indutivamente, assuma que a derivada de ordem $n-1$ de f em x, denotada por $f^{(n-1)}(t)$, exista em uma vizinhança x. Sob tais hipóteses, definimos a derivada de ordem n de f em x, denotada por $f^{(n)}(x)$, por

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h},$$

quando tal limite existe.

1.2 Fórmula de Taylor

Theorem 1.2 (Fórmula de Taylor)**.** *Suponha que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é tal que $f^{(n-1)}$ seja contínua em $[a,b]$ e que $f^{(n)}$ exista em (a,b) para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Sejam $x_0 \in (a,b)$ e $x \in (a,b)$ tais que $x_0 \neq x$.

Defina o polinômio de Taylor de f de ordem $n-1$ em torno de x_0, por

$$P(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(t-x_0)^j, \ \ \forall t \in [a,b],$$

isto é,

$$P(t) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(t-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(t-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(t-x_0)^{n-1},$$

onde denotamos

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0).$$

Sob tais hipóteses, existe $\tilde{x}$ entre x_0 e x tal que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(\tilde{x})(x-x_0)^n}{n!},$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\tilde{x})(x-x_0)^n}{n!}. \end{aligned} \tag{1}$$

Proof. Defina $M \in \mathbb{R}$ por

$$M = \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n},$$

isto é,

$$f(x) = P(x) + M(x-x_0)^n. \tag{2}$$

Defina também

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t-x_0)^n, \quad \forall t \in [a,b].$$

Observe que $g(x_0) = f(x_0) - P(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$, e

$$g(x) = f(x) - P(x) - M(x-x_0)^n = 0.$$

Do teorema de Rolle, existe x_1 entre x e x_0 tal que $g'(x_1) = 0$.

Observe também que $g'(x_0) = f'(x_0) - P'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.

Logo, também do teorema de Rolle, existe x_2 entre x_0 e x_1 tal que

$$g''(x_2) = 0.$$

Finalmente, considerando que $g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$, prosseguindo com o raciocínio acima, após n passos podemos achar $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ em (a,b) tais que

$$g^{(j)}(x_j) = 0, \forall j \in \{1, \cdots, n-1\}$$

e x_n entre x_0 and x_{n-1} tal que

$$g^{(n)}(x_n) = 0.$$

Denotando $x_n = \tilde{x}$, temos que $\tilde{x} \in (a,b)$ e

$$g^{(n)}(\tilde{x}) = f^{(n)}(\tilde{x}) - n!M = 0,$$

isto é,

$$M = \frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!},$$

e assim , disto e (2), obtemos

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(\tilde{x})(x - x_0)^n}{n!}.$$

A prova está completa. $\square$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = e^x.$$

Obtenha a expansão de Taylor de f de ordem n em torno do ponto $x_0 = 0$.

Observe que, para $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x - 0)^2 + \cdots \\ &\cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)(x - 0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\tilde{x})(x - 0)^n}{n!}, \end{aligned} \tag{3}$$

onde $\tilde{x}$ está entre 0 e x.

Observe que

$$f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x$$

e indutivamente,

$$f^{(j)}(x) = \frac{d^j e^x}{dx^j} = e^x, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$f^{(j)}(0) = e^0 = 1, \forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Disto e (3), obtemos,

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\tilde{x}}}{n!}x^n.$$

2 Sobre a concavidade

Obervação inicial: Nessa aula faremos os gráficos e ilustrações em sala.

Observe que para $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em (a, b), do teorema do valor médio obtivemos,

$$f(x) \text{ é crescente em } (a, b) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \text{ em } (a, b)$$

portanto, também do teorema do valor médio para f', temos que

$$f'(x) \text{ é crescente em } (a, b) \Leftrightarrow f''(x) > 0 \text{ em } (a, b)$$

e nesse caso a concavidade de f é para cima.

Similarmente,

$$f'(x) \text{ é decrescente em } (a,b) \Leftrightarrow f''(x) < 0 \text{ em } (a,b),$$

nesse caso a concavidade de f é para baixo.

Resumindo:

$$f''(x) > 0 \text{ em } (a,b), \text{ concavidade para cima (positiva).}$$

$$f''(x) < 0 \text{ em } (a,b), \text{ concavidade para baixo (negativa).}$$

Observação: Os pontos onde a concavidade de f muda de positiva para negativa ou vice-versa, são ditos serem os pontos de inflexão de f. Assim se x_0 é ponto de inflexão e $f''(x_0)$ existe, temos que

$$f''(x_0) = 0.$$

3 Roteiro para esboçar o gráfico de uma função f

1. Determine o domínio de f, denotado por D_f.

2. Obtenha a intersecção com os eixos x e y, isto é obtenha $f(0)$ e se possível, obtenha os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 0$.

3. Simetrias: observe se

   $$f(x) = f(-x), \ \forall x \in D_f.$$

   Nesse caso f é par e o eixo y é de simetria.

   Observe se

   $$f(x) = -f(-x), \forall x \in D_f.$$

   Nese caso f é ímpar.

   Verifique também se f é periódica e nesse caso, obtenha $T \in \mathbb{R}$ tal que

   $$f(x+T) = f, \ \forall x \in D_f.$$

4. Assíntotas: Obtenha as assíntotas horizontais de f.

   Relembramos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal de f quando

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

   ou

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Obtenha as assíntotas verticais de f. Relembramos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical de f quando

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \text{ ou } \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

5. Obtenha os intervalos onde f é crescente ($f'(x) > 0$) e onde f é decrescente ($f'(x) < 0$).

6. Obtenha os pontos críticos de f e classifique-os de acordo com o teste da derivada primeira ou derivada segunda.

   Obtenha os valores de $f(x)$ nos pontos críticos, quando possível.

7. Concavidade e inflexão: Obtenha os intervalos onde $f''(x) > 0$ (concavidade para cima) e onde $f''(x) < 0$ (concavidade para baixo).

   Obtenha também os pontos de inflexão do gráfico de f.

8. Com as informações obtidas acima, esboce o gráfico de f.

Exemplo: Esboce o gráfico de
$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}.$$

1. Domínio de f

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 1 \text{ e } x \neq -1\}. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Intersecção com os eixos:

$$f(0) = 0.$$

3. Simetrias. f é par, pois

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 1}, \ \forall x \in D_f.$$

4. Assíntotas horizontais:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-1/x^2} \\
&= 2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Assim a reta $y = 2$ é a assíntota horizontal de f

Assíntotas verticais: soluções de $x^2 - 1 = 0$, isto é $x = 1$, ou $x = -1$.

De fato

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} &= \text{''}\left(\frac{2}{0+}\right)\text{''} = +\infty, \\
\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} &= \text{''}\left(\frac{2}{0-}\right)\text{''} = -\infty, \\
\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} &= \text{''}\left(\frac{2}{0-}\right)\text{''} = -\infty, \\
\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} &= \text{''}\left(\frac{2}{0+}\right)\text{''} = +\infty.
\end{aligned}
$$

Portanto, as retas $x = 1$ e $x = -1$ são as assíntotas verticais de f.

5.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)' \\
&= \frac{(2x^2)'(x^2-1) - 2x^2(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{4x(x^2-1) - 2x^2(2x)}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{4x^3 - 4x - 4x^3}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{-4x}{(x^2-1)^2}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Logo o sinal de $f'(x)$ será o sinal de $-4x$.

Portanto $f'(x) > 0$ (f crescente) em $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

$f'(x) < 0$ (f decrescente) em $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

6. Ponto crítico
$$x = 0.$$
Derivada Segunda:
$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)' \\
&= \frac{((-4x)'(x^2-1)^2 - (-4x)[(x^2-1)^2]'}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x[2(x^2-1)]2x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{-4(x^2-1) + 8x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{-4x^2 + 4 + 16x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}. \qquad (7)
\end{aligned}$$
Logo
$$f''(0) = -4 < 0.$$
Portanto $x = 0$ é um ponto de máximo local.

7. Concavidade: Como $12x^2 + 4 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, o sinal de $f''(x)$ será o sinal de $(x^2-1)^3$ o qual é o sinal de $x^2 - 1$.

   Logo $f''(x) > 0$ (concavidade para cima), em
$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$
   $f''(x) < 0$, (concavidade para baixo) em $(-1, 1)$.

8. Esboce o gráfico de f.