Cálculo 1 - Regra de L'Hôspital

Prof. Fabio Silva Botelho

October 23, 2017

1 Esboço do gráfico de uma função real

1.1 Sobre a concavidade

Obervação inicial: Nessa aula faremos os gráficos e ilustrações em sala.

Observe que para $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em (a, b), do teorema do valor médio obtivemos,

$$f(x) \text{ é crescente em } (a, b) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \text{ em } (a, b)$$

portanto, também do teorema do valor médio para f', temos que

$$f'(x) \text{ é crescente em } (a, b) \Leftrightarrow f''(x) > 0 \text{ em } (a, b)$$

e nesse caso a concavidade de f é para cima.

Similarmente,

$$f'(x) \text{ é decrescente em } (a, b) \Leftrightarrow f''(x) < 0 \text{ em } (a, b),$$

nesse caso a concavidade de f é para baixo.

Resumindo:

$$f''(x) > 0 \text{ em } (a, b), \text{ concavidade para cima (positiva).}$$

$$f''(x) < 0 \text{ em } (a, b), \text{ concavidade para baixo (negativa).}$$

Observação: Os pontos onde a concavidade de f muda de positiva para negativa ou vice-versa, são ditos serem os pontos de inflexão de f. Assim se x_0 é ponto de inflexão e $f''(x_0)$ existe, temos que

$$f''(x_0) = 0.$$

1.2 Roteiro para esboçar o gráfico de uma função f

1. Determine o domínio de f, denotado por D_f.

2. Obtenha a intersecção com os eixos x e y, isto é obtenha $f(0)$ e se possível, obtenha os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 0$.

3. Simetrias: observe se
$$f(x) = f(-x),\ \forall x \in D_f.$$
Nesse caso f é par e o eixo y é de simetria.

   Observe se
$$f(x) = -f(-x), \forall x \in D_f.$$
Nese caso f é ímpar.

   Verifique também se f é periódica e nesse caso, obtenha $T \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(x+T) = f,\ \forall x \in D_f.$$

4. Assíntotas: Obtenha as assíntotas horizontais de f.

   Relembramos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal de f quando
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$
ou
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$
Obtenha as assíntotas verticais de f. Relembramos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical de f quando
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \text{ ou } \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

5. Obtenha os intervalos onde f é crescente ($f'(x) > 0$) e onde f é decrescente ($f'(x) < 0$).

6. Obtenha os pontos críticos de f e classifique-os de acordo com o teste da derivada primeira ou derivada segunda.

   Obtenha os valores de $f(x)$ nos pontos críticos, quando possível.

7. Concavidade e inflexão: Obtenha os intervalos onde $f''(x) > 0$ (concavidade para cima) e onde $f''(x) < 0$ (concavidade para baixo).

   Obtenha também os pontos de inflexão do gráfico de f.

8. Com as informações obtidas acima, esboce o gráfico de f.

Exemplo: Esboce o gráfico de
$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

2 Regra de L'Hôspital, introdução

Sejam f e g sejam funções deriváveis em $(a,b)\setminus\{x_0\}$ onde $x_0\in(a,b)$.
Suponha que

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x)=0,$$

ou

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty.$$

Sob tais hipóteses,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação: Com hipóteses similares o resultado também é válido quando

$$x_0=\pm\infty.$$

3 Justificativa informal da regra de L'Hôspital

Observe que se $f(x_0)=0$ e $g(x_0)=0$, f' e g' são contínuas em x_0 e $g'(x_0)\neq 0$, então

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Para a caso em que $x_0\in\mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty,$$

e onde

$$l=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{+\infty}{+\infty},$$

temos que

$$1/l=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{0}.$$

Com as hipóteses do caso anterior, obteríamos,

$$1/l = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)},$$

e assim

$$l = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Finalmente, para o caso em que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0},$$

fazemos a mudança de variáveis,

$$y = 1/x$$

e assim

$$y \to 0^+$$

quando $x \to +\infty$.

Logo,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \frac{0}{0}.$$

Portanto, com as hipóteses similares às do primeiro caso para essas funções, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y \to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} \\ &= \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(1/y)(-1/y^2)}{g'(1/y)(-1/y^2)} \\ &= \lim_{y \to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Outros casos são tratados similarmente.

4 Exemplos e exercícios

Exemplo: Seja

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Calcule

$$\lim_{x \to 1} f(x).$$

Observe que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{\ln 1}{1-1} = \frac{0}{0}.$$

Utilizando L'Hôspital, obtemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Exercício: Calcule

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Observe que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Utilizando L'Hôspital, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} \\
&= +\infty.
\end{aligned} \tag{4}$$

Exercício: Calcule

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}.$$

Observe que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Utilizando L'Hôspital, temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt[3]{x})'} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1/3x^{-2/3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^{1/3}} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

5 Derivação Logarítmica

Considere o problem de obter a derivada de $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = x^x.$$

Com certa informalidade, utilizaremos a derivação logarítmica:
Observe que de $f(x) = x^x$, obtemos

$$\ln f(x) = \ln(x^x) = x \ln x.$$

Logo,

$$(\ln f(x))' = (x \ln x)'$$

ou seja,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Portanto,

$$f'(x) = f(x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1),\ \forall x > 0$$

Exercício: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = x^{\cos x}.$$

Obtenha $f'(x)$.

Exercício: $f : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = (\cos x)^x.$$

Obtenha $f'(x)$.