Cálculo 1 - Funções Hiperbólicas

Prof. Fabio Silva Botelho

October 30, 2017

1 Funções Hiperbólicas

1.1 Funções seno-hiperbólico e cosseno-hiperbólico

Definition 1.1. *Definimos a função seno-hiperbólico, denotada por* $senh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, por*

$$senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definimos a função cosseno-hiperbólico, denotada por $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, por*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercício: Prove que

$$(\text{ senh}(x))' = \cosh(x)$$

e

$$(\cosh(x))' = \text{ senh}(x).$$

1.2 Funções tangente (tanh), co-tangente (cotanh), secante (sech) e co-secante (cosech) hiperbólicas

Tais funções são definidas por,

$$\tanh(x) = \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\text{cotanh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\text{senh}(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq 0,$$

$$\text{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\text{cosech}(x) = \frac{1}{\text{senh}(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq 0.$$

Exercício: Seja $x \in \mathbb{R}$. Prove que, nos domínios das funções em questão, temos que

1.
$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1,$$

2.
$$1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x),$$

3.
$$1 - \operatorname{cotanh}^2(x) = -\operatorname{cosech}^2(x),$$

4.
$$(\tanh(x))' = \operatorname{sech}^2(x),$$

5.
$$(\operatorname{cotanh}(x))' = -\operatorname{cosech}^2(x),$$

6.
$$(\operatorname{sech}(x))' = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x),$$

7.
$$(\operatorname{cosech}(x))' = -\operatorname{cosech}(x)\coth(x).$$

Exercício: Calcule $f'(x)$, para as funções $f(x)$ indicadas:

1.
$$f(x) = \tanh(x^3 + 5x + 1),$$

2.
$$f(x) = \ln(x^2 + 3x)\cosh^2(x^7 + 8x),$$

3.
$$f(x) = \ln(\operatorname{senh}(x^3 + 9x + 1)),$$

4.
$$f(x) = (\cosh x)^{x^3+2x},$$

5.
$$f(x) = (x^3 + 12x)^{\tanh x}.$$