Cálculo 1 - Terceira Aula
Produto Cartesiano e Relações

Prof. Fabio Silva Botelho

August 2, 2017

1 Produto cartesiano

Definition 1.1. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Definimos o produto cartesiano entre A e B, denotado por $A \times B$, por*

$$A \times B = \{(x, y) \ : \ x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Aqui genericamente $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ denota o par ordenado de abscissa a e ordenada b.

Exemplo:

Sejam

$$A = \{1, 2, 3\}$$

e

$$B = \{1, 2\}.$$

Assim,

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\},$$

e

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}.$$

Exercício: Dados os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 \leq x \leq 3\},$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -2 \leq x \leq 2\},$$

represente no plano catesiano $A \times B$ e $B \times A$.

Exercício: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 \leq x < 3\}$. Represente no plano cartesiano $A \times B$ e $B \times A$.

Definition 1.2 (Relação binária)**.** *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que um conjunto R é uma relação binária de A em B quando*

$$R \subset A \times B.$$

Denotamos também,

$$xRy \Leftrightarrow (x,y) \in R.$$

Exemplo: Considere os conjuntos

$$A = \{1,2,3,4,5\},$$

e

$$B = \{1,2,3,4\}.$$

Seja

$$R = \{(x,y) \in A \times B \;:\; x < y\}.$$

Obtenha os elementos de R.

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}.$$

Exemplo: Seja $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{1,2,3,4,5,6\}$. Obtenha os elementos de R, onde

$$R = \{(x,y) \in A \times B \;:\; y = x + 2\}.$$

$$R = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}.$$

Exercício: Sejam

$$A = \{x \in \mathbb{R} \;:\; 1 \leq x \leq 3\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{R} \;:\; 1 \leq x \leq 2\}.$$

Represente no plano cartesiano R, onde

$$R = \{(x,y) \in A \times B \;:\; y = x\}.$$

2 Domínio e imagem de uma relação

Definition 2.1. *Sejam A, B conjuntos e $R \subset A \times B$ uma relação.*

Definimos o domínio de R, denotado por $D(R)$, por

$$D(R) = \{x \in A \;:\; \text{ existe } y \in B \text{ tal que } (x,y) \in R\}.$$

Assim $D(R) \subset A$.

Definimos a imagem de f, denotada por $I_m(R)$, por

$$I_m(R) = \{y \in B \;:\; \text{ existe } x \in A \text{ tal que } (x,y) \in R\}.$$

Logo $I_m(R) \subset B$.

Exercício: Sejam

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 \leq x \leq 3\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 \leq x \leq 4\}.$$

Represente R no plano cartesiano e obtenha seu domínio e sua imagem, onde

$$R = \{(x, y) \in A \times B \ : \ y = 2x\}.$$

3 Relação inversa

Definition 3.1. *Sejam A e B conjuntos e seja $R \subset A \times B$ uma relação binária.*
Definimos a relação binária inversa de R, denotada por $R^{-1} : B \to A$, por

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \ : \ (x, y) \in R\}.$$

Exemplo: Sejam $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Obtenha os elementos de

$$R = \{(x, y) \in A \times B \ : \ x < y - 1\}$$

e R^{-1}. Obtenha também os domínios e as imagens de R e R^{-1}.

$$R = \{(2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 7), (5, 7)\},$$

$$R^{-1} = \{(5, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (7, 4), (7, 5)\},$$

$$D(R) = \{2, 3, 4, 5\} = I_m(R^{-1}),$$

$$I_m(R) = \{5, 7\} = D(R^{-1}).$$

Exercício:
Sejam

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 \leq x \leq 4\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 2 \leq y \leq 8\}.$$

Represente no plano cartesiano R e R^{-1}, onde

$$R = \{(x, y) \in A \times B \ : \ y = 2x\}.$$