Cálculo 1 - Introdução ao Cálculo Integral
Integrais Indefinidas

Prof. Fabio Silva Botelho

November 8, 2017

1 Primitivas

Definition 1.1. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos uma primitiva ou anti-derivada de f em (a, b), denotada por $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, como qualquer função $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in (a, b).$$

Vejamos alguns exemplos com certa informalidade.

Para $f(x) = \cos x$, por exemplo

$$F(x) = \text{ sen}(x)$$

é uma primitiva de f em $\mathbb{R}$, pois,

$$F'(x) = (\text{sen}(x))' = \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para $f(x) = \sec^2(x)$, temos que

$$F(x) = \tan(x)$$

é uma primitiva de f em D, pois

$$F'(x) = (\tan(x))' = \sec^(x), \ \forall x \in D,$$

onde

$$D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \cos(x) \neq 0\}.$$

1.1 Integral indefinida

Definition 1.2. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função.*

Definimos a integral indefinida de f em (a, b), denotado por

$$\int f(x) \, dx,$$

por

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C, \ \forall C \in \mathbb{R}$$

onde $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ é qualquer primitiva de f.

Por exemplo:

$$\int x^2\ dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

pois,

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2, \forall C \in \mathbb{R}.$$

Observe que, para $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável em (a, b), temos que

$$\int f'(x)\ dx = f(x) + C,$$

pois

$$(f(x) + C)' = f'(x),\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

Vejamos algumas integrais indefinidas:

1.
$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$
pois,
$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n, \forall C \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

2.
$$\int x^r\ dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \forall x > 0,\ r \in \mathbb{R},\ \text{tal que } r \neq -1,$$
pois
$$\left(\frac{x^{r+1}}{r+1} + C\right)' = x^r.$$

3.
$$\int \operatorname{sen}(x)\ dx = -\cos(x) + C,$$

4.
$$\int \cos(x)\ dx = \operatorname{sen}(x) + C,$$

5.
$$\int \sec^2(x)\ dx = \tan(x) + C,$$

6.
$$\int \operatorname{cosec}^2(x)\ dx = -\cot(x) + C,$$
pois
$$(-\cot(x) + C)' = \operatorname{cosec}^2(x),\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

7.
$$\int \sec(x)\tan(x)\ dx = \sec(x) + C,$$

8.
$$\int \operatorname{cosec}(x)\cot(x)\ dx = -\operatorname{cosec}(x) + C,$$

9.
$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln(x) + C,$$
pois
$$(\ln(x) + C)' = \frac{1}{x},\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

Observação: Se $x < 0$, então $|x| = -x$ e assim,
$$(\ln(|x|))' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$
E também se $x > 0$, $|x| = x$ e portanto,
$$(\ln(|x|))' = (\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$
Logo,
$$(\ln(|x|))' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0.$$
Conclui-se então que
$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln(|x|) + C,\ \forall x \neq 0.$$

10.
$$\int e^x\ dx = e^x + C,\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

11.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \operatorname{arcsen}(x) + C,$$
pois
$$(\operatorname{arcsen}(x) + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall |x| < 1,\ C \in \mathbb{R}.$$

12.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$$

pois

$$(\arctan(x) + C)' = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}.$$