# Cálculo 1 - Cálculo Integral
# Integração por Substituição

Prof. Fabio Silva Botelho

November 13, 2017

## 1 Primitivas (Revisão)

**Definition 1.1.** *Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função. Definimos uma primitiva ou anti-derivada de $f$ em $(a,b)$, denotada por $F:(a,b)\to\mathbb{R}$, como qualquer função $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ tal que*

$$F'(x)=f(x),\ \forall x\in(a,b).$$

Vejamos alguns exemplos com certa informalidade.

Para $f(x)=\cos x$, por exemplo

$$F(x)=\ \mathrm{sen}(x)$$

é uma primitiva de $f$ em $\mathbb{R}$, pois,

$$F'(x)=(\mathrm{sen}(x))'=\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Para $f(x)=\sec^2(x)$, temos que

$$F(x)=\tan(x)$$

é uma primitiva de $f$ em $D$, pois

$$F'(x)=(\tan(x))'=\sec^2(x),\ \forall x\in D,$$

onde

$$D=\{x\in\mathbb{R}\ :\ \cos(x)\neq 0\}.$$

### 1.1 Integral indefinida

**Definition 1.2.** *Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função.*

*Definimos a integral indefinida de $f$ em $(a,b)$, denotado por*

$$\int f(x)\,dx,$$

*por*

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,\ \forall C\in\mathbb{R}$$

*onde $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ é qualquer primitiva de $f$.*

Por exemplo:

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

pois,

$$\left( \frac{x^3}{3} + C \right)' = x^2, \forall C \in \mathbb{R}.$$

Observe que, para $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável em $(a, b)$, temos que

$$\int f'(x) \, dx = f(x) + C,$$

pois

$$(f(x) + C)' = f'(x), \ \forall C \in \mathbb{R}.$$

Vejamos algumas integrais indefinidas:

1. $$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

   pois,

   $$\left( \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right)' = x^n, \forall C \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

2. $$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \forall x > 0, \ r \in \mathbb{R}, \ \text{tal que } r \neq -1,$$

   pois

   $$\left( \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \right)' = x^r.$$

3. $$\int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x) + C,$$

4. $$\int \cos(x) \, dx = \operatorname{sen}(x) + C,$$

5. $$\int \sec^2(x) \, dx = \tan(x) + C,$$

6.
$$\int \operatorname{cosec}^2(x)\, dx = -\cot(x) + C,$$
pois
$$(-\cot(x) + C)' = \operatorname{cosec}^2(x),\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

7.
$$\int \sec(x)\tan(x)\, dx = \sec(x) + C,$$

8.
$$\int \operatorname{cosec}(x)\cot(x)\, dx = -\operatorname{cosec}(x) + C,$$

9.
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + C,$$
pois
$$(\ln(x) + C)' = \frac{1}{x},\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

Observação: Se $x < 0$, então $|x| = -x$ e assim,
$$(\ln(|x|))' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$
E também se $x > 0$, $|x| = x$ e portanto,
$$(\ln(|x|))' = (\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$
Logo,
$$(\ln(|x|))' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0.$$
Conclui-se então que
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C,\ \forall x \neq 0.$$

10.
$$\int e^x\, dx = e^x + C,\ \forall C \in \mathbb{R}.$$

11.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen}(x) + C,$$
pois
$$(\operatorname{arcsen}(x) + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall |x| < 1,\ C \in \mathbb{R}.$$

12.
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$$

pois
$$(\arctan(x) + C)' = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}.$$

# 2 Integração por Substituição

Sejam $f : (a,b) \to (c,d)$ e $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ funções tais que $f$ é derivável em $(a,b)$ e $G : (c,d) \to \mathbb{R}$ é tal que
$$G'(u) = g(u),\ \forall u \in (c,d).$$

Considere a integral indefinida
$$I = \int g(f(x))f'(x)\,dx.$$

Assim,
$$\begin{aligned} I &= \int G'(f(x))f'(x)\,dx \\ &= \int (G(f(x))'\,dx \\ &= G(f(x)) + C,\ \forall C \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

## 2.1 Raciocinando mais informalmente, em termos de diferenciais

Considere novamente,
$$I = \int g(f(x))f'(x)\,dx. \tag{2}$$

Defina
$$u(x) = f(x).$$

Logo
$$\frac{du(x)}{dx} = f'(x),$$

ou na forma diferencial,
$$du = f'(x)\,dx$$

De tais resultados e (2), obtemos,
$$\begin{aligned} I &= \int g(f(x))f'(x)\,dx \\ &= \int g(u)\,du \\ &= G(u) + C \\ &= G(f(x)) + C. \end{aligned} \tag{3}$$

## 2.2 Exemplos e exercícios

Exemplo: Calcule

$$I = \int (x^2+5)^{15} x \, dx.$$

Seja

$$u = x^2 + 5.$$

Logo

$$du = 2x \, dx.$$

Portanto,

$$I = \int u^{15} \frac{du}{2}.$$

Logo,

$$I = \frac{1}{2}\frac{u^{16}}{16} + C = \frac{u^{16}}{32} + C.$$

Portanto

$$I = \frac{1}{32}(x^2+5)^{16}.$$

Exercício: Calcule

$$I = \int x^2 \sqrt{1+x} \, dx.$$

Seja

$$u = 1 + x.$$

Assim

$$du = dx$$

e

$$x = u - 1.$$

Portanto

$$I = \int (u-1)^2 \sqrt{u} \, du,$$

ou seja

$$I = \int (u^2 - 2u + 1) u^{1/2} \, du.$$

Logo,

$$I = \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}) \, du,$$

isto é,

$$I = \frac{u^{7/2}}{7/2} - 2\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C,$$

ou seja,

$$I = \frac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$