Cálculo 1 - Cálculo Integral
Teorema Fundamental do Cálculo

Prof. Fabio Silva Botelho

November 17, 2017

1 Resultados Preliminares

Theorem 1.1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).*
Suponha que

$$f'(x) = 0, \ \forall x \in (a, b).$$

Sob tais hipóteses, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = C, \ \forall x \in [a, b].$$

Proof. Seja $x \in (a, b]$.
Do teorema do valor médio, existe $\tilde{x} \in (a, x)$ tal que

$$f(x) - f(a) = f'(\tilde{x})(x - a) = 0,$$

ou seja

$$f(x) = f(a) \equiv C, \ \forall x \in [a, b].$$

$\square$

Corolary 1.2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função e sejam $F_1, F_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções tais que*

$$F_1'(x) = f(x)$$

e

$$F_2'(x) = f(x), \ \forall x \in (a, b).$$

Sob tais hipóteses existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$F_2(x) = F_1(x) + C, \ \forall x \in [a, b].$$

Proof. Observe que

$$\begin{aligned} [F_2(x) - F_1(x)]' &= F_2'(x) - F_1'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0, \; \forall x \in (a,b). \end{aligned} \tag{1}$$

Do último teorema existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$F_2(x) - F_1(x) = C, \; \forall x \in [a,b].$$

A prova está completa. □

Observação: Desse último resultado podemos concluir que se $F_1, F_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ são duas primitivas de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então elas diferem apenas por uma constante, isto é, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$F_2(x) = F_1(x) + C, \; \forall x \in [a,b].$$

Portanto, podemos escrever,

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx &= F_1(x) + C_1 \\ &= F_2(x) + C_2, \; \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

2 Integral de Riemann

Começamos com a definição de partição.

Definition 2.1. *Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado. Definimos uma partição de $[a,b]$, denotada por P, por*

$$P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\},$$

onde

$$x_0 = a < x_1 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Definimos a norma de P, denotada por $|P|$, por

$$|P| = \max\{\Delta x_i, \; i \in \{1, \cdots, n\}\},$$

onde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \; \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Exemplo,

$$[a,b] = [1,5],$$

e seja

$$P = \{1, 2, 4, 5\}.$$

Logo,

$$|P| = 4 - 2 = 2.$$

Definition 2.2 (Soma e Integral de Riemann)**.** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada, isto é, uma função tal que existe* $K > 0$ *tal que*

$$|f(x)| \leq K, \forall x \in [a, b].$$

Seja

$$P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$$

uma partição de $[a, b]$*.*

Definimos uma soma de Riemann de f *em relação a* P*, denotada por* R_f^P*, como*

$$R_f^P = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i,$$

onde

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

e

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Por outro lado, escrevemos

$$I = \lim_{|P| \to 0} R_f^P,$$

quando para cada $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que se*

$$0 < |P| < \delta,$$

então

$$|R_f^P - I| < \varepsilon,$$

para toda soma de Riemann de f *relativa à* P*.*

Nesse caso também denotamos,

$$I = \lim_{|P| \to 0} R_f^P \equiv R \int_a^b f(x)\, dx,$$

onde

$$I = R \int_a^b f(x)\, dx$$

é dita ser a integral de Riemann de f *em* $[a, b]$ *(isto é,* f *é integrável à Riemann).*

Observação: Para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que

$$f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b],$$

e para uma partição

$$P = \{x_0 = 0, x_1, \cdots, x_n = b\}$$

de $[a,b]$, temos que

$$R_f^P = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

é uma aproximação para a área sob o gráfico de f entre a e b. A aproximação será tanto melhor quanto menor for $|P|$.

Assim sendo, definiremos então a área sob o gráfico de f em $[a,b]$, denotada por A, por

$$A = \lim_{|P|\to 0} R_f^P = R\int_a^b f(x)\,dx.$$

2.1 Propriedades da integral de Riemann

Theorem 2.3. *A integral de Riemann apresenta as seguintes propriedades:*

1. *Toda função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ é integrável à Riemann em $[a,b]$.*

2. *Sejam $f_1, f_2 : [a,b]\to\mathbb{R}$ funções integráveis à Riemann em $[a,b]$. Sob tais hipóteses,*

   (a)
   $$R\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx = R\int_a^b f_1(x)\,dx + R\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

   (b)
   $$R\int_a^b \alpha f_1(x)\,dx = \alpha\left(R\int_a^b f_1(x)\,dx\right),\ \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

   (c) Se
   $$f_1(x)\geq f_2(x),\ \forall x\in[a,b],$$
   então
   $$R\int_a^b f_1(x)\,dx \geq R\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

   (d)
   $$R\int_a^b f_1(x)\,dx = R\int_a^c f(x)\,dx + R\int_c^b f_1(x)\,dx,\ \forall c\in(a,b).$$

A prova desse teorema, a qual decorre da definição da integral de Riemann como limite de somas de Riemann, não será apresentada nesse texto.

2.2 Teorema do valor médio para integrais

Theorem 2.4 (Teorema do valor médio para integrais)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$.*

Sob tais hipóteses, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$R\int_a^b f(x)\, dx = f(x_0)(b - a).$$

Proof. Denotemos

$$m = \min\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\}$$

e

$$M = \max\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\}.$$

Logo

$$m \le f(x) \le M, \forall x \in [a, b].$$

Disto e do do item 2d do último teorema, obtemos

$$m(b - a) \le R\int_a^b f(x)\, dx \le M(b - a). \tag{3}$$

Defina $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x)(b - a).$$

Disto e (3), obtemos

$$\begin{aligned} \min\{g(x) \ : \ x \in [a, b]\} &= m(b - a) \\ &\le R\int_a^b f(x)\, dx \\ &\le M(b - a) \\ &= \max\{g(x) \ : \ x \in [a, b]\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Sendo g contínua, de (4) e do teorema do valor intermediário, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$g(x_0) = f(x_0)(b - a) = R\int_a^b f(x)\, dx.$$

A prova está completa. ☐

3 Teorema Fundamental do Cálculo

Theorem 3.1 (Teorema fundamental do cálculo, parte I)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.*

Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = R\int_a^x f(t)\, dt.$$

Sob tais hipóteses,

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b).$$

Proof. Seja $x \in (a,b)$.

Seja $h > 0$ tal que $x + h \in (a,b)$.

Assim, dos dois últimos dois teoremas, podemos escrever

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= R\int_a^{x+h} f(t)\,dt - R\int_a^x f(t)\,dt \\ &= R\int_a^x f(t)\,dt + R\int_x^{x+h} f(t)\,dt - R\int_a^x f(t)\,dt \\ &= R\int_x^{x+h} f(t)\,dt \\ &= f(\tilde{x})h, \end{aligned} \tag{5}$$

para algum $\tilde{x} \in [x, x+h]$.

Portanto,

$$(F')^+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\tilde{x})h}{h} = f(x).$$

Similarmente, podemos mostrar que

$$(F')^-(x) = f(x).$$

Logo,

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b).$$

A prova está completa.

□

Definition 3.2. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f, isto é, uma função tal que*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b).$$

Seja $[c,d] \subset (a,b)$. Definimos a integral definida de f em $[c,d]$, denotada por

$$\int_c^d f(x)\,dx,$$

por

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c).$$

Observação: A segunda parte do teorema fundamental do cálculo conecta esse último conceito de integral definida, obtida mediante anti-derivação, com o conceito de integral de Riemann, a qual é obtida pelo limite de somas de Riemann.

Theorem 3.3 (Teorema fundamental do cálculo, parte II)**.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $[c,d] \subset (a,b)$. Sob tais hipóteses,*

$$\int_c^d f(x)\,dx = R\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c),$$

onde

$$F(x) = R\int_a^x f(t)\,dt, \forall x \in [a,b].$$

Proof. Da parte I, obtemos,

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b).$$

Logo,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \forall C \in \mathbb{R}.$$

Disto e da definição de integral definida obtemos,

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c). \tag{6}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} F(d) - F(c) &= R\int_a^d f(t)\,dt - R\int_a^c f(t)\,dt \\ &= R\int_a^c f(t)\,dt + R\int_c^d f(t)\,dt - R\int_a^c f(t)\,dt \\ &= R\int_c^d f(t)\,dt. \end{aligned} \tag{7}$$

De (6) e (7), obtemos

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c) = R\int_c^d f(x)\,dx.$$

A prova está completa.

$\square$