Cálculo 1 - Quarta Aula
Funções

Prof. Fabio Silva Botelho

August 3, 2017

1 Funções

Definition 1.1 (Função)**.** *Sejam A e B conjuntos. Uma relação $f : A \to B$ é dita ser uma função, quando para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.*

Nesse caso denotamos, $y = f(x)$.

Exemplo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Para para uma função $f : A \to B$ onde

$$y = f(x),\ \forall x \in A,$$

o conjunto A é dito ser o domínio de f, e o conjunto B o seu contradomínio.

A imagem de f, denotada por $I_m(f)$, é definida por

$$I_m(f) = \{f(x)\ :\ x \in A\}.$$

Exemplo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ (domínio de f)},$$

$$\text{Contradomínio de f } : \mathbb{R}$$

e

$$I_m(f) = [0, +\infty) = \{y \in \mathbb{R}\ :\ y \geq 0\}.$$

1.1 Funções iguais

Definition 1.2. *Sejam $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$ conjuntos e $f : A \to B$, $g : C \to D$ funções.*

Dizemos que $f = g$ (f é igual a g) quando,

1. *$A = C$,*

2. $B = D$ *e*

3. $f(x) = g(x),\ \forall x \in A.$

Exercício: Considere as relações definidas por

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$$

e

$$g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}.$$

Obtenha o "maior" domínio possível para f e g.
Obtenha o "maior" conjunto possível no qual f e g podem ser funções iguais.
Solução:

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ x+1 \neq 0 \text{ e } \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \right\}.$$

Logo,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq -1 \text{ e } (x < -1 \text{ ou } x \geq 1)\},$$

Isto é,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < -1 \text{ ou } x \geq 1\}.$$

E também,

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x - 1 \geq 0 \text{ e } x + 1 > 0\},$$

ou seja,

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 1\}.$$

Logo, o "maior" conjunto possível no qual f e g podem ser iguais é

$$D(f) \cap D(g) = D(g).$$

1.2 Funções compostas

Definition 1.3. *Sejam $A, B, C \subset \mathbb{R}$ conjuntos e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.*
Definimos a função composta $(g \circ f) : A \to C$ por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x \in A.$$

Exemplo: Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 2x + 1$$

e

$$g(x) = x^2.$$

Assim

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 = (2x+1)^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observe que em geral

$$(f \circ g) \neq (g \circ f).$$

Exrecício: Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = x^3 + 5x$$

e

$$g(x) = \text{ sen } x + 3x.$$

Obtenha $(g \circ f)$ e $(f \circ g)$.

Exercício: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = x + 1.$$

Obtenha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$(g \circ f)(x) = x^2.$$

Exercício: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = x - 1.$$

Obtenha g e seu domínio tais que

$$(g \circ f)(x) = \frac{x+1}{x+2}, \ \forall x \neq -2.$$