Cálculo 1 - Quinta Aula
Funções Lineares e Afins

Prof. Fabio Silva Botelho

August 3, 2017

1 Função Constante

Definition 1.1. *Uma função tal que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = c, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

é dita ser uma função constante.

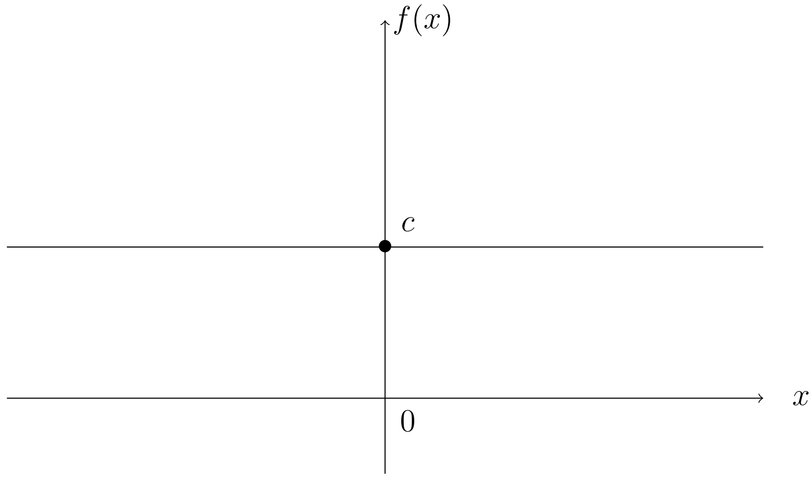

Figure 1: Gráfico da função constante $f(x) = c$

Seu grafico é paralelo ao eixo x, conforme a figura 1.
Observe que a imagem de f, denotada por $Im(f)$, é dada por $Im(f) = \{c\}$.
Exemplo: Vejamos o exemplo:

$$f(x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

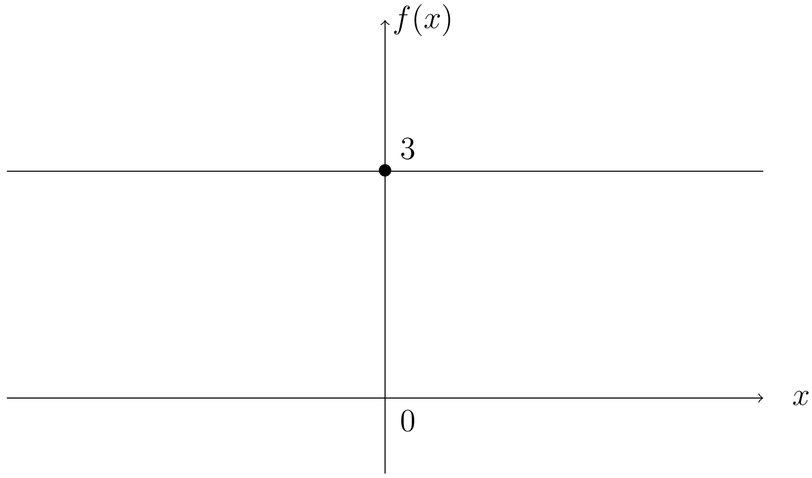

Figure 2: Gráfico da função constante $f(x) = 3$

2 Função Identidade

Definition 2.1. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

é dita ser a função identidade.

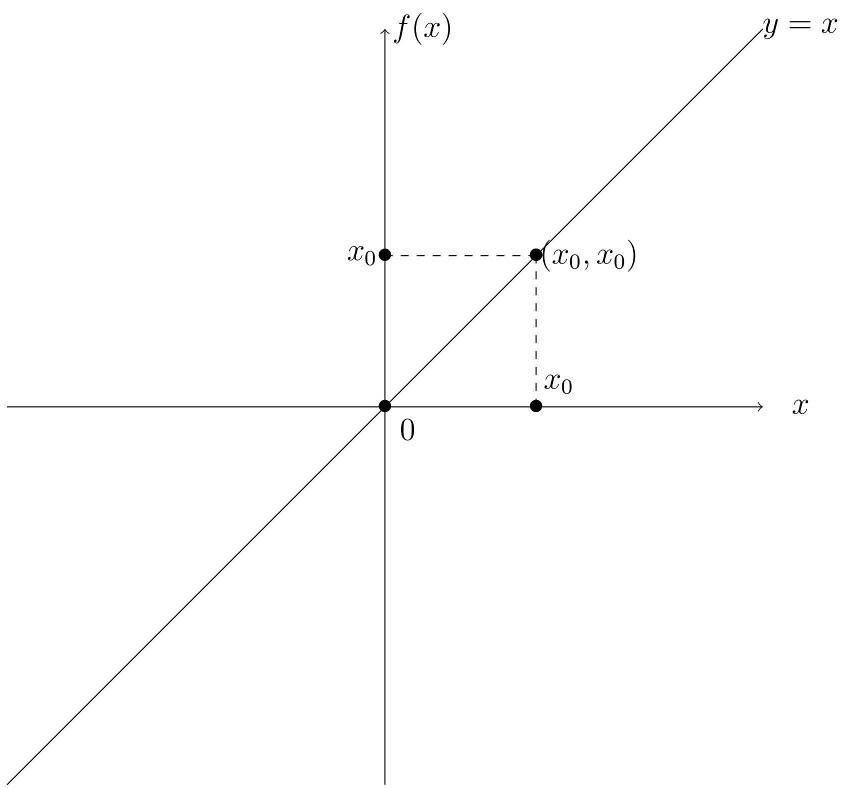

Figure 3: Gráfico da função identidade $f(x) = x$

3 Função Afim

Definition 3.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$ e*

$$f(x) = ax + b, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

é dita ser uma função afim.

In particular, se $b = 0$ a função também é dita ser linear.

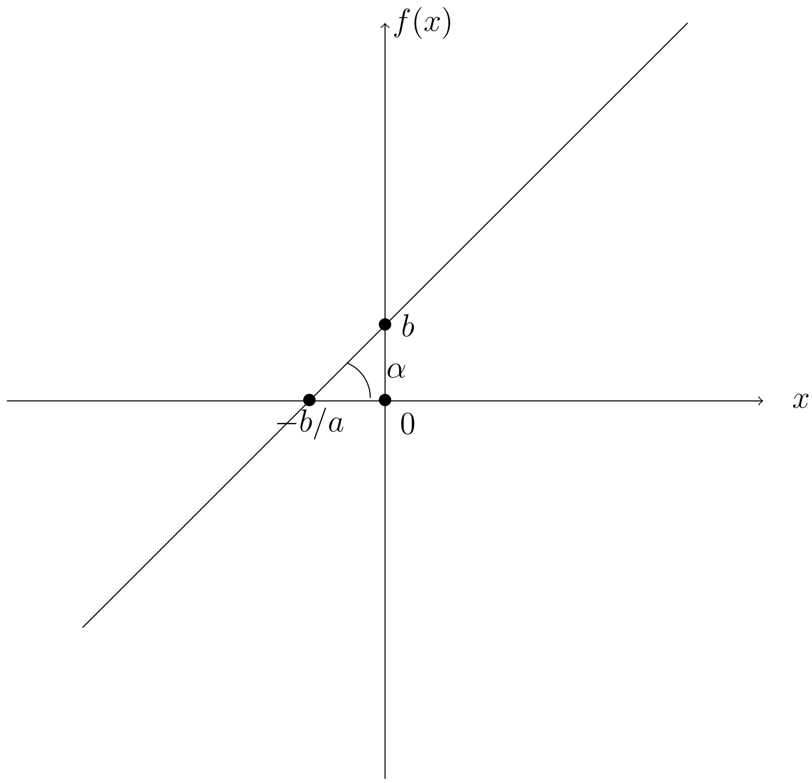

Figure 4: Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$

Para $f(x) = ax + b$ e correspondente reta $r : \; y = ax + b$,

- b é dito ser o coeficiente linear de r,
- a é dito ser o coeficiente angular de r.

Da figura, temos,

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{0 - (-b/a)} = \frac{b}{b/a} = a,$$

ou seja, o coeficiente angular a é a tangente do ângulo que r faz com o eixo x.
Exemplo: Esboce o gráfico da reta

$$r: \ y = -x + 3.$$

Assim $a = -1$, e $b = 3$.
Precisamos de apenas dois pontos para esboçar o gráfico de uma reta.
Observe que:

$$x = 0 \Rightarrow y = 3,$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2.$$

Portanto $A(0, 3) \in r$ e $B(1, 2) \in r$.
Vejamos o seu gráfico.

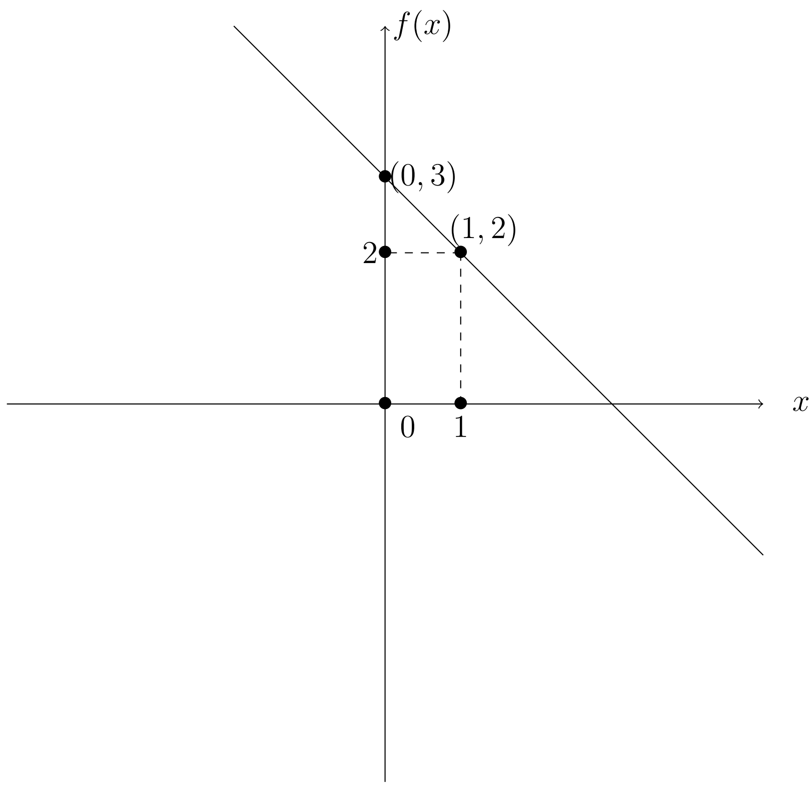

Figure 5: Gráfico da função afim $f(x) = -x + 3$

Exercícios

1. Obtenha a equação da reta r que passa por $A(2, 3)$ e $B(3, 5)$.

$$r: \ y = ax + b,$$

$$A(2,3) \in r \Rightarrow 3 = 2a + b,$$

$$A(3,5) \in r \Rightarrow 5 = 3a + b.$$

Devemos resolver o sistema,

$$\begin{cases} 3 = 2a + b \\ 5 = 3a + b, \end{cases}$$

Subtraindo a primeira da segunda equação obtemos,

$$a = 2,$$

e assim da primeira euação,

$$b = 3 - 2a = 3 - 4 = -1.$$

Logo

$$r: \ y = 2x - 1.$$

Exercício: Obtenha a equação da reta r que tem coeficiente angular -1 e que passa por $A(3,7)$.

$$r: \ y = ax + b,$$

onde $a = -1$, e assim

$$y = -x + b$$

O ponto $A(3,7) \in r$, portanto,

$$7 = -3 + b,$$

ou seja,

$$b = 10.$$

Logo,

$$r: \ y = -x + 10.$$

Exercício: Obtenha a equação da reta r que tem coeficiente linear 5 e que passa por $A(-1,9)$.

$$r: \ y = ax + b,$$

onde $b = 5$, e assim

$$y = ax + 5$$

O ponto $A(-1,9) \in r$, portanto,

$$9 = -1a + 5,$$

ou seja,

$$a = -4.$$

Logo,

$$r:\ y = -4x + 5.$$

Exercício: O custo em reais da produção de x litros de uma certa substância é dado por uma função afim de x, com $x \geq 0$, cujo gráfico é a seguir apresentado.

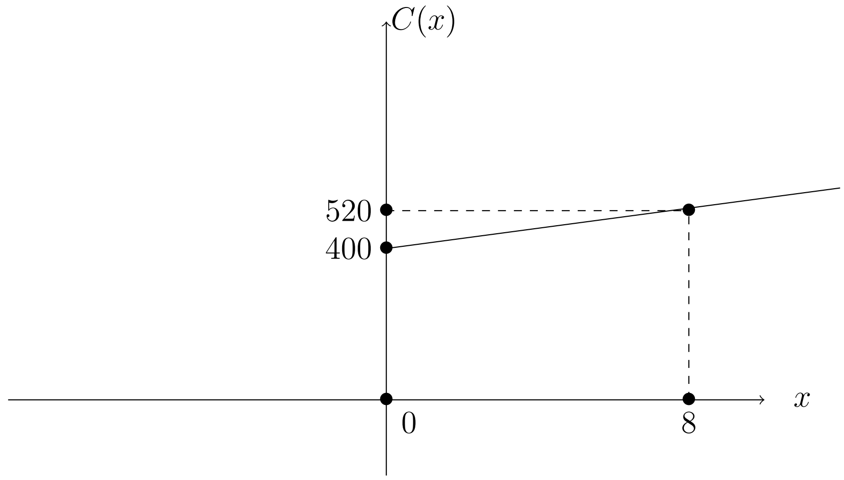

Figure 6: Gráfico da função afim $C(x)$

(a) Qual é o custo de se produzir 10 litros.

(b) O custo de 700, 00 reais corresponde à produção de quantos litros?

$$C(x) = ax + b,$$

onde

$$C(0) = 400 = b,$$

ou seja $b = 400$.

Por outro lado

$$C(8) = 520,$$

e assim,

$$a8 + 400 = 520.$$

Portanto $a = 120/8$, ou seja,

$$a = 15.$$

Logo

$$C(x) = 15x + 400.$$

Em particular,

$$C(10) = 15(10) + 400 = 550.$$

Portanto o custo de se produzir 10 litros é de 550 reais.

Por outro lado,

de $C(x) = 700$, obtemos,

$$700 = 15x + 400,$$

ou seja

$$15x = 300,$$

e assim,

$$x = 300/15 = 20 litros.$$

Conclui-se que o custo de 700 reais corresponde à produção de 20 litros.

4 Sinal da Função Afim

Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suponha $a > 0$.

Observe que $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow ax_0 + b = 0$, ou seja

$$x_0 = -\frac{b}{a}.$$

Tal x_0 é dito ser o zero da função afim em questão.

Para

$$x_2 > x_1,$$

temos

$$y_1 = ax_1 + b,$$

e

$$y_2 = ax_2 + b,$$

e assim

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) > 0.$$

Portanto

$$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 > y_1.$$

Logo f é crescente.

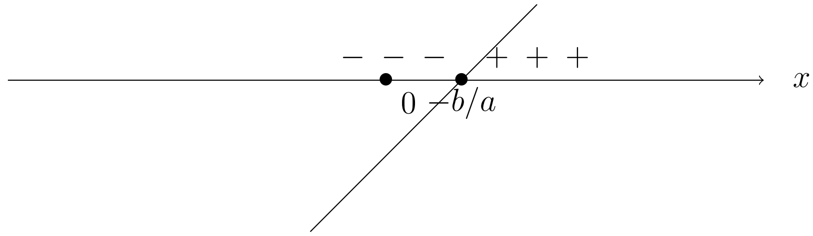

Figure 7: Sinal função afim $f(x) = ax + b$ com $a > 0$.

Suponha agora $a < 0$.

Novamente, $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow ax_0 + b = 0$, ou seja

$$x_0 = -\frac{b}{a}.$$

Para

$$x_2 > x_1,$$

temos

$$y_1 = ax_1 + b,$$

e

$$y_2 = ax_2 + b,$$

e assim

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) < 0.$$

Portanto

$$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1.$$

Logo f é decrescente.

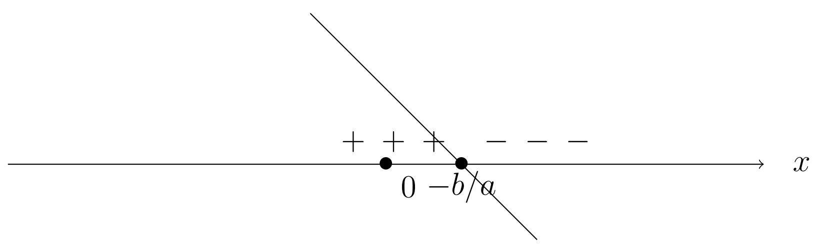

Figure 8: Sinal função afim $f(x) = ax + b$ com $a < 0$.

Exemplo:

Estude o sinal de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde,

(a) $y = 2x + 3$,

(b) $y = 3 - 4x$.

De (1a), $y = 2x + 3$, e assim obtemos,

$$y = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3/2.$$

Como $a > 0$, obtemos o seguinte sinal para f,

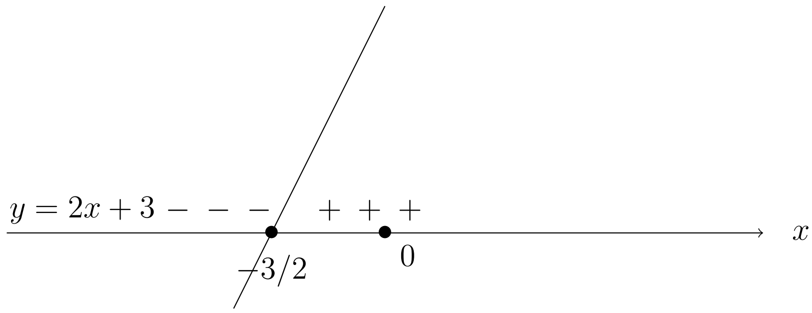

Figure 9: Sinal função afim $f(x) = 2x + 3$.

De (1b), $y = 3 - 4x$, e assim obtemos,

$$y = 0 \Leftrightarrow 3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 3/4.$$

Como $a < 0$, obtemos o seguinte sinal para f,

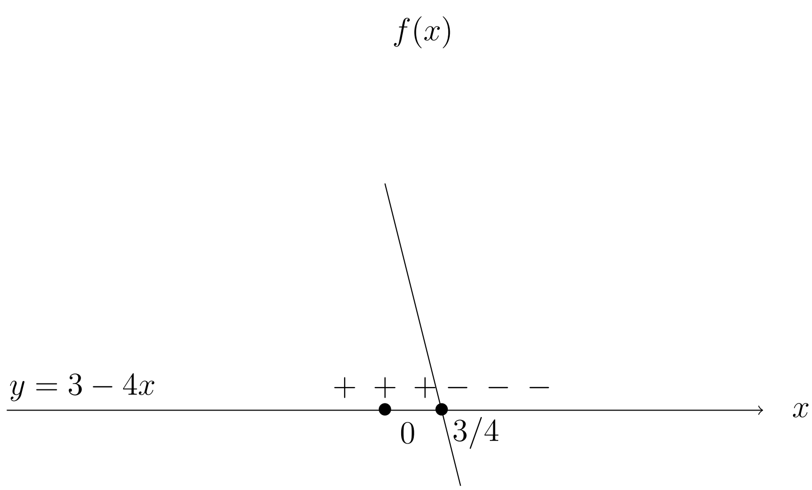

Figure 10: Sinal função afim $f(x) = 3 - 4x$.

Exercício: Resolva a inequação produto real:

$$(3x - 2)(x + 1)(3 - x) \leq 0.$$

A solução dessa inequação é obtida mediante a análise do sinal dos termos. Vejamos a figura abaixo indicada.

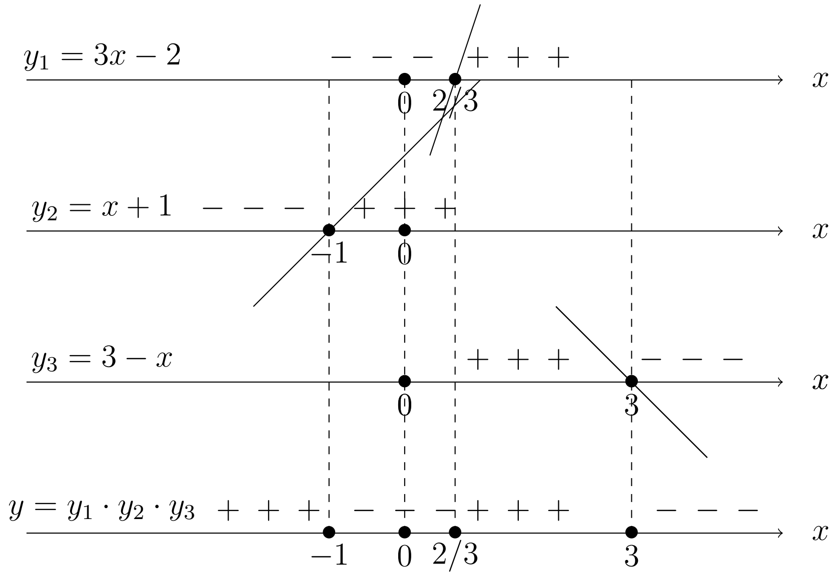

Figure 11: Sinal função $f(x) = (3x - 2)(x + 1)(3 - x)$.

Portanto a soluçao final será:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 \leq x \leq 2/3 \text{ ou } x \geq 3\}.$$

Exercício: Resolva a inequação real,

$$\frac{3x + 4}{1 - x} \leq 2.$$