Cálculo 1 - Sexta Aula- Funções Quadráticas

Prof. Fabio Silva Botelho

August 7, 2017

1 Função Quadrática

Definition 1.1. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que existem* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tais que* $a \neq 0$ *e*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

é dita ser uma função quadrática.

Qualitativamente, o gráfico da função quadrática (parábola) é a seguir indicado:

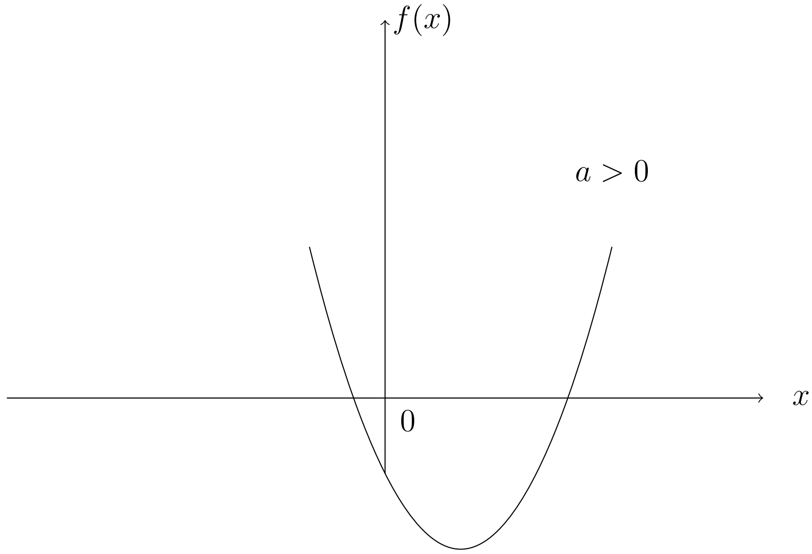

Figure 1: Gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$

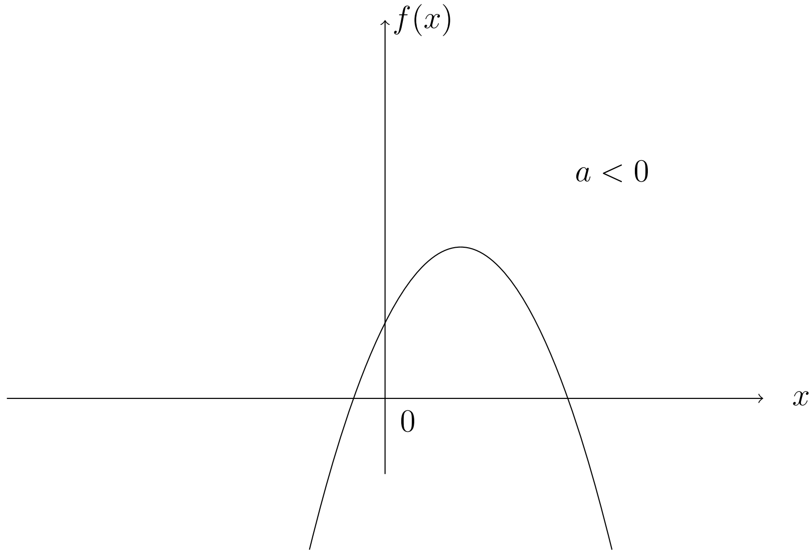

Figure 2: Gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a < 0$

2 Forma Canônica- Cálculo das Raízes

Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \; \forall x \in \mathbb{R}, \text{ com } a \neq 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Raízes ou zeros da função quadrática:
Observe que

$$f(x) = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

ou seja,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

isto é,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

e assim,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

e portanto,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Finalmente, denotando,

$$b^2 - 4ac = \Delta,$$

chegamos à fórmula de Baskara,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2.1 Número de raízes

1. Primeiro caso: $\Delta > 0$.

   Nesse caso temos duas raízes reais distintas, a saber,

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

   e

   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Segundo caso: $\Delta = 0$. Nesse caso temos duas raízes reais iguais, ou seja, um zero real duplo, a saber,

   $$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

3. Terceiro caso: $\Delta < 0$.

   Nesse caso

   $$\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$$

   e portanto não temos raízes reais.

Exercício: Determine os zeros da quadrática

$$f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1.$$

Nesse caso,

$$a = -1,\ b = 3/2 \text{ e } c = 1.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3/2)^2 - 4(-1)(1) = 9/4 + 4 = (9+16)/4 = 25/4.$$

Potanto, da fórmula de Baskara,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3/2 \pm \sqrt{25/4}}{2(-1)} = \frac{-3/2 \pm 5/2}{-2}.$$

Logo temos duas raízes, a saber,

$$x_1 = \frac{-3/2 - 5/2}{-2} = 2,$$

e

$$x_2 = \frac{-3/2 + 5/2}{-2} = -1/2.$$

Assim

$$S = \{-1/2, 2\}.$$

Exercício: Resolva o sistema,

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ x \cdot y = 12, \end{cases}$$

Da segunda equação,

$$y = \frac{12}{x}. \tag{2}$$

Substituindo tal resultado na primeira equação, obtemos,

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{12} = \frac{7}{12},$$

ou seja,

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{12} - \frac{7}{12} = 0,$$

ou seja

$$\frac{12 + x^2 - 7x}{12x} = 0,$$

e assim devemos ter,

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Disto e da fórmula de Baskara,

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} = \frac{7 \pm 1}{2}.$$

Temos então duas soluções, a saber,

$$x_1 = (7-1)/2 = 6/2 = 3,$$

e

$$x_2 = (7+1)/2 = 4.$$

Disto e (2),

$$y_1 = \frac{12}{x_1} = 12/3 = 4,$$

e

$$y_2 = \frac{12}{x_2} = 12/4 = 3.$$

Assimm

$$S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \{(3,4), (4,3)\}.$$

Exercício: Determine os valores de m tais que a função quadrática

$$f(x) = (m-1)x^2 + (2m+3)x + m$$

tenha dois zeros reais distintos.

Deve-se ter

$$\Delta > 0$$

onde

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

e onde

$$a = m-1,\ b = 2m+3 \text{ e } c = m.$$

Logo, deve-se ter,

$$(2m+3)^2 - 4(m-1)m > 0,$$

istó é,

$$4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 + 4m > 0,$$

ou seja,

$$16m > -9,$$

e portanto,

$$m > -9/16.$$

Mas também deve-se ter $a \neq 0$, ou seja $m - 1 \neq 0$, e portanto,

$$m \neq 1.$$

Logo,

$$S = \{m \in \mathbb{R} \ : \ m > -9/16 \text{ e } m \neq 1\}.$$

3 Valores Máximo e Mínimo da Função Quadrática

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e onde $a > 0$.

Na forma canônica, temos,

$$f(x) \quad = \quad a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta^2}{4a^2}\right]. \tag{3}$$

Claramente, f atinge o seu valor mínimo no ponto x_v tal que

$$x_v + \frac{b}{2a} = 0,$$

isto é,

$$x_v = -\frac{b}{2a},$$

onde x_v é abscissa do vértice.

A correspondente ordenada é dada por

$$y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Resumindo, o ponto de mínimo de f ocorre em

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

e seu valor é

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a},$$

onde

$$(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

são as coordenadas do vértice.

Vejamos a figura,

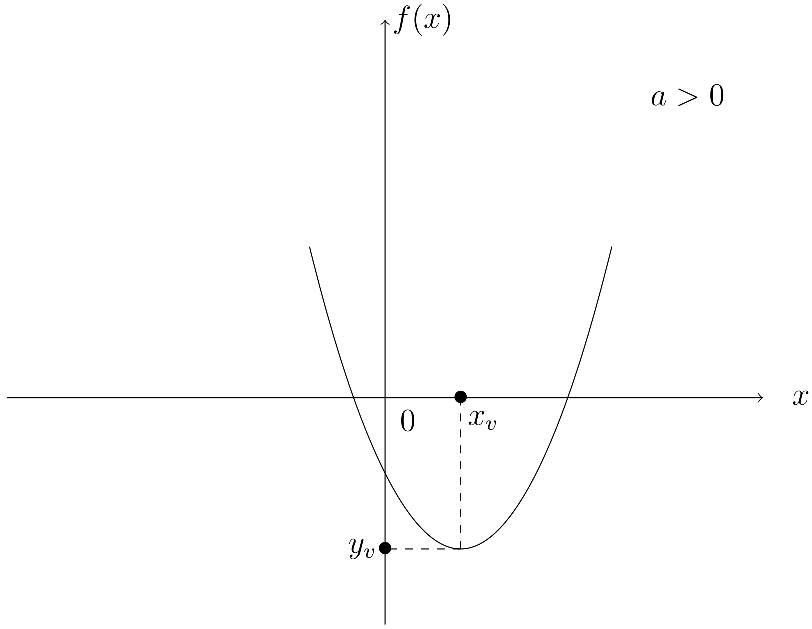

Figure 3: Gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$

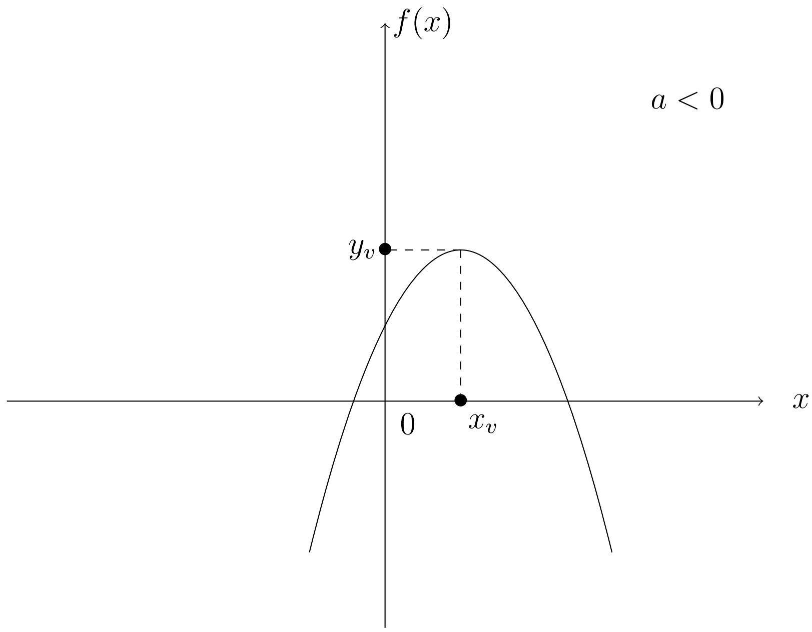

Figure 4: Gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a < 0$

Similarmente, se $a < 0$, o ponto de máximo de f ocorre em

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

e seu valor é

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a},$$

onde

$$(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

são as coordenadas do vértice.

Oberve que se $a > 0$ a imagem de f, denotada por $I_m(f)$ é dada por

$$I_m(f) = [y_v, +\infty) = \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right).$$

E se $a < 0$ a imagem de f é dada por

$$I_m(f) = (-\infty, y_v] = \left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right].$$

Exercício: Obtenha o valor de m tal que a função quadrática

$$f(x) = 3x^2 - 2x + m$$

tenha o valor mínimo de $5/3$.

Deve-se ter

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = 5/3,$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$, $a = 3$, $b = -2$ e $c = m$.

Assim

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)m = 4 - 12m.$$

Deve-se ter,

$$-\frac{4 - 12m}{4(3)} = 5/3,$$

ou seja

$$4 - 12m = -20,$$

isto é,

$$-12m = -24,$$

e portanto,

$$m = 2.$$

Portanto,

$$S = \{2\}.$$

Exercício: Resolva a inequação produto

$$(x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 3) \geq 0.$$

Seja

$$f_1(x) = x^2 - x - 2,$$

Assim
$$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0,$$
isto é,
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

Logo as raízes serão,
$$x_1 = (1-3)/2 = -1,$$
e
$$x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Seja
$$f_2(x) = -x^2 + 4x - 3,$$

Assim
$$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0,$$
isto é,
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(-1)(-3)}}{2(-1)} = \frac{-4 \pm 2}{-2}.$$

Logo as raízes serão,
$$x_1 = (-4+2)/(-2) = 1,$$
e
$$x_2 = \frac{-4-2}{-2} = 3.$$

O resultado final é obtido mediante uma análise dos sinais de f_1 e f_2.

Vejamos a figura abaixo indicada,

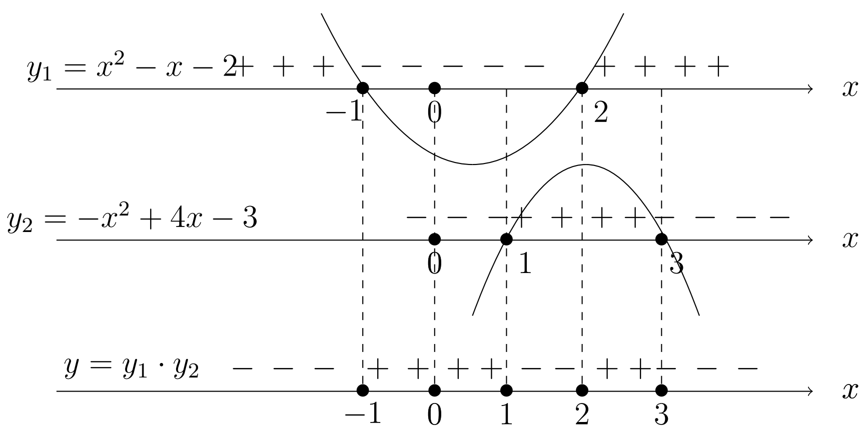

Figure 5: Sinal função $f(x) = (x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 3)$.

Logo,
$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}.$$