Cálculo - Sétima Aula - Função Módulo

Prof. Fabio Silva Botelho

August 10, 2017

1 Função Módulo

Definition 1.1 (Módulo de um número real)**.** *Seja* $x \in \mathbb{R}$*. Definimos o módulo de* x*, denotado por* $|x|$*, como*

$$|x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Propriedades do módulo:

1. $|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3. $|x \cdot y| = |x||y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$,
4. $|x|^2 = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$,
5. $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$,
6. Desigualdade triangular:
$$|x + y| \leq |x| + |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$
7. Para $a \geq 0$ temos que
$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$
e
$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a.$$
Exemplos:
$$|-3| = 3,\ |2| = 2,\ |-5| = 5,\ etc.$$

Provaremos apensa o item 6, deixaremos a prova dos demais itens como exercício.
Sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

Observe que

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) \\ &= x^2 + 2x\cdot y + y^2 \\ &\leq x^2 + 2|x||y| + y^2 \\ &= (|x|+|y|)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Obtivemos então,

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2,$$

ou seja,

$$|x+y| \leq |x|+|y|,\ \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

1.1 A função módulo

A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

é dita ser a função módulo.

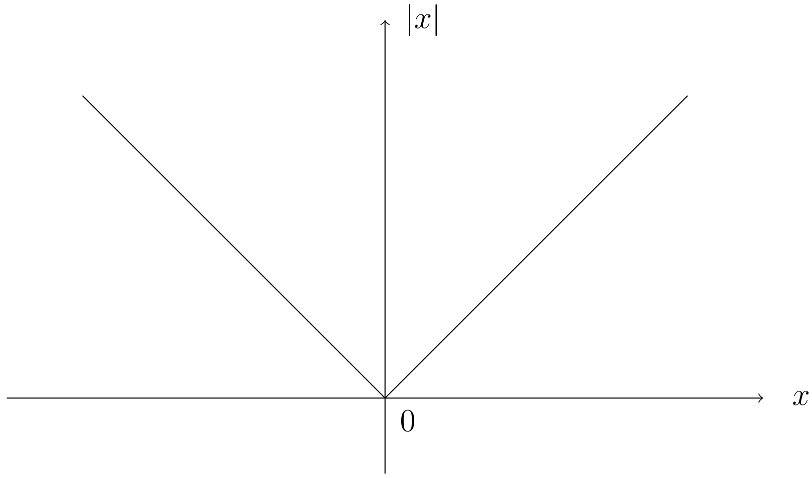

Figure 1: Gráfico da função módulo

Exemplo:
Esboce no plano Cartesiano o gráfico da função, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, onde,

$$f(x) = |x+1|,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observe que

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -x-1, & \text{se } x+1 < 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

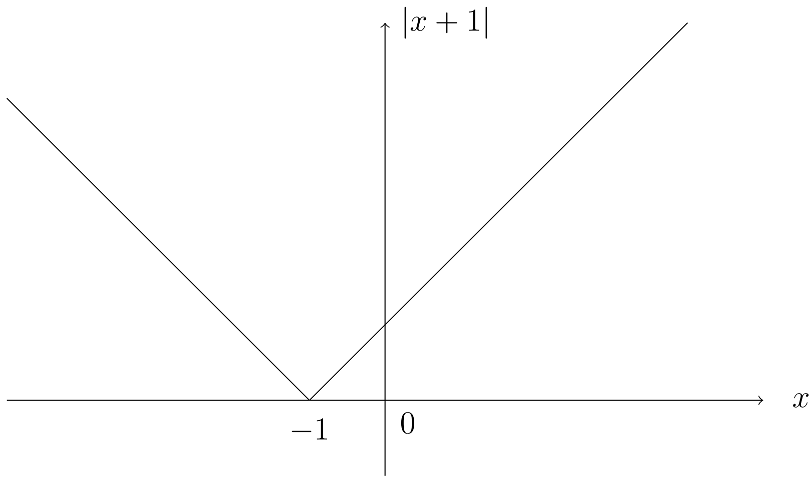

Figure 2: Gráfico da função $f(x) = |x+1|$

Exercício:
Esboce no plano Cartesiano o gráfico da função, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde,

$$f(x) = |x+2| + x - 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observe que

$$|x+2| + x - 1 = \begin{cases} x+2+x-1, & \text{se } x+2 \geq 0 \\ -x-2+x-1, & \text{se } x+2 < 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$|x+2| + x - 1 = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \geq -2 \\ -3, & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

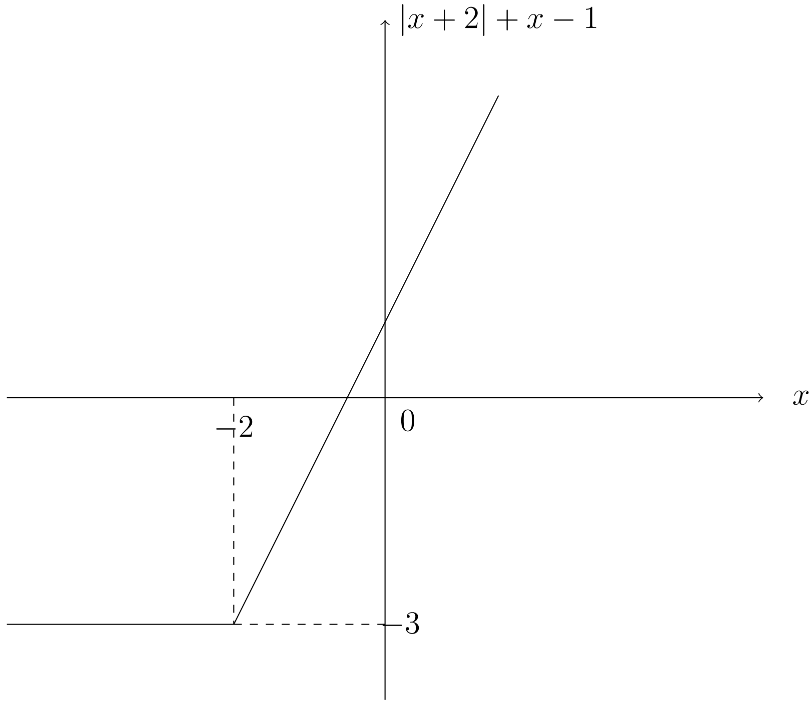

Figure 3: Gráfico da função $f(x) = |x+2| + x - 1$

Exercicio:
Resolva a equação real:

$$|3x+2| = |x-1|.$$

Deve-se ter

$$3x+2 = x-1$$

ou

$$3x+2 = -(x-1).$$

Observe que

$$3x+2 = x-1 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -3/2. \tag{2}$$

Assim

$$S_1 = \{-3/2\}.$$

E também,

$$3x+2 = -(x-1) \Leftrightarrow 4x = -1 \Leftrightarrow x = -1/4.$$

Logo

$$S_2 = \{-1/4\}.$$

A solução final será

$$S = S_1 \cup S_2 = \{-3/2, -1/4\}.$$

Exercício: Resolva a inequação real:

$$|3x - 2| < 4.$$

Deve-se ter

$$-4 < 3x - 2 < 4.$$

De

$$3x - 2 < 4$$

obtemos, $x < 2$.

De

$$3x - 2 > -4,$$

obtemos $x > -2/3$.

A solução final será a intersecção entre essas duas soluções.

Assim,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -2/3 < x < 2\}.$$

Exercício: Resolva a inequação,

$$|2 - 3x| \geq 1.$$

Deve-se ter

$$2 - 3x \geq 1$$

ou

$$2 - 3x \leq -1.$$

Observe que

$$2 - 3x \geq 1 \Leftrightarrow 3x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1/3.$$

e

$$2 - 3x \leq -1 \Leftrightarrow 3x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

A solução final será a união entre essas duas soluções, isto é,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq 1/3 \text{ ou } x \geq 1\}.$$

Exercício: Resolva a inequação,

$$|2x + 1| + 4 - 3x > 0.$$

Observe que,

$$|2x + 1| + 4 - 3x = \begin{cases} 2x + 1 + 4 - 3x, & \text{se } 2x + 1 \geq 0 \\ -2x - 1 + 4 - 3x, & \text{se } 2x + 1 < 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$|2x+1|+4-3x = \begin{cases} -x+5, & \text{se } x \geq -1/2 \\ -5x+3, & \text{se } x < -1/2 \end{cases}$$

Logo se $x \geq -1/2$, deve-se ter,
$-x+5 > 0$ ou seja $x < 5$.
Portanto,

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \;:\; -1/2 \leq x < 5\}.$$

Se $x < -1/2$, deve-se ter $-5x+3 > 0$ ou seja $x < 3/5$.
Assim

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x < -1/2\}.$$

A solução final será a união entre essas duas soluções, ou seja,

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x < 5\}.$$

Exercícios:

1. Esboce o gráfico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2|.$$

2. Resolva a inequação:

$$|x^2 - 5x + 5| < 1.$$

Deve-se ter

$$-1 < x^2 - 5x + 5 < 1.$$

Observe que

$$x^2 - 5x + 5 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0.$$

E também

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4.$$

Assim

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \;:\; 1 < x < 4\}.$$

Observe que

$$x^2 - 5x + 5 > -1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0.$$

E também

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3.$$

Assim

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x < 2 \text{ ou } x > 3\}.$$

A solução final será

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}.$$

Exercício:
Resolva a inequação em $\mathbb{R}$:

$$|2x - 6| - |x| \leq 4 - x.$$

Exercício:
Resolva a inequação em $\mathbb{R}$:

$$|x + 2| - |x - 3| > x.$$