

Cálculo 1 - Oitava Aula

Função Exponencial

Prof. Fabio Silva Botelho

August 14, 2017

1 Função Exponencial

Sejam $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

A potência b na base a será denotada por

$$a^b > 0.$$

Propriedades da Potenciação:

1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$, $\forall a > 0, b, c \in \mathbb{R}$,
2. $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$, $\forall a > 0, b, c \in \mathbb{R}$,
3. $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$, $\forall a > 0, b > 0, c \in \mathbb{R}$,

4.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}, \quad \forall a > 0, b > 0, c \in \mathbb{R},$$

1.1 Funções exponenciais e respectivos gráficos

Definition 1.1. *Seja $a > 0$ tal que $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que*

$$f(x) = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

é dita ser a função exponencial de base a .

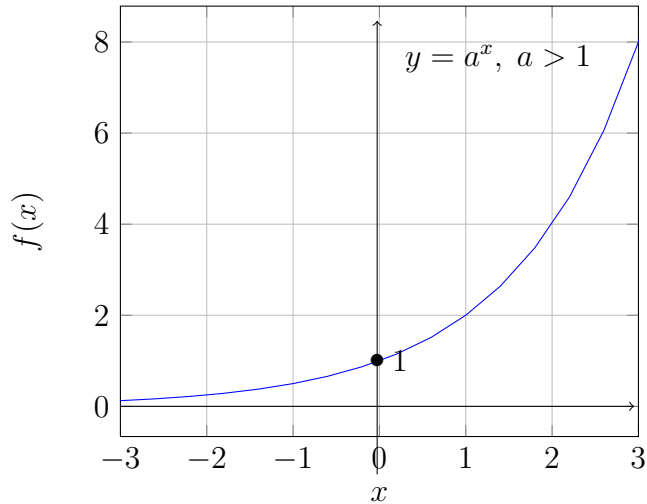


Figure 1: Gráfico da função $f(x) = a^x$, $a > 1$

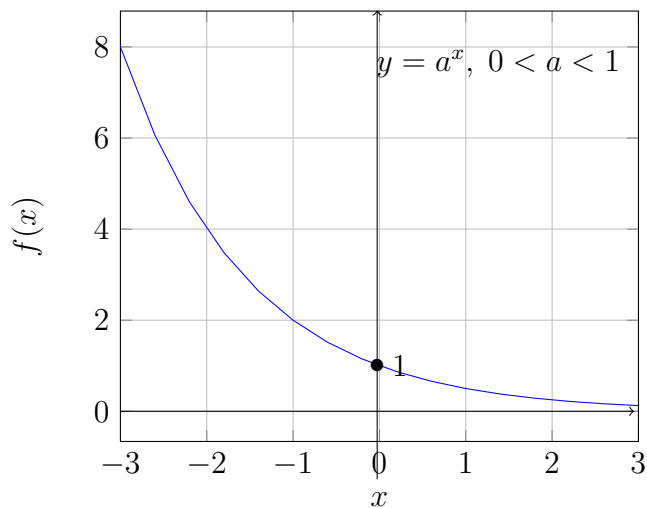


Figure 2: Gráfico da função $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$

Observe que se $a > 1$ a função exponencial é estritamente crescente.

Se $0 < a < 1$, a função exponencial é estritamente decrescente.

Exercício: Esboce o gráfico da função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = 2^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1.2 Base natural e respectiva função exponencial

Base natural:

x	$(1+x)^{1/x}$
0.01	2,705
0.001	2,717
0.00001	2,7183

Table 1: Aproximações para e .

Definimos a base logarítmica natural, denotada por e , por

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}.$$

Obtemos então

$$e \approx 2.7183 \dots$$

De fato, observemos a tabela 1,

Definition 1.2. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que

$$f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R},$$

é dita ser a função exponencial de base natural e .

Seu gráfico é indicado na figura abaixo.

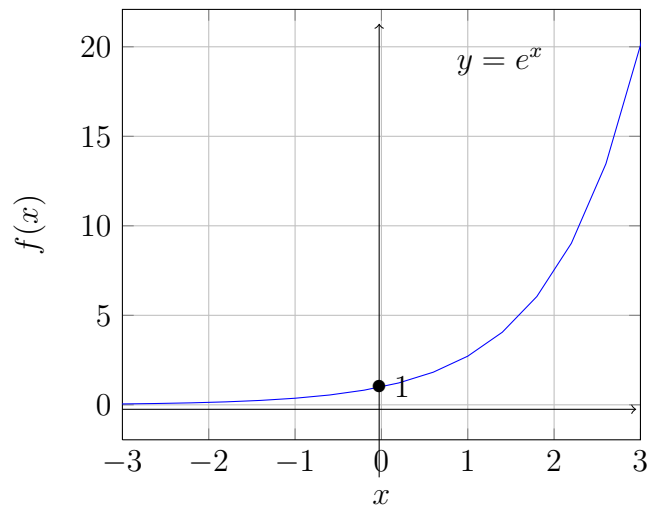


Figure 3: Gráfico da função $f(x) = e^x$,

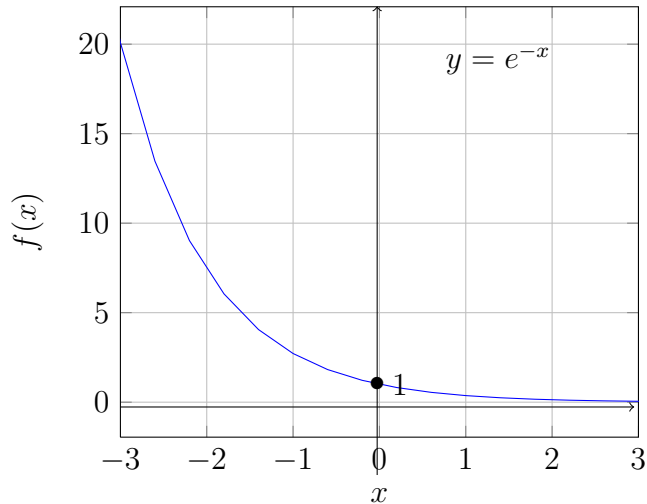


Figure 4: Gráfico da função $f(x) = e^{-x}$.

2 Equações Exponenciais

Observe que a função exponencial é estritamente crescente se $a > 1$ e estritamente decrescente se $0 < a < 1$.

Assim, para $a > 0, a \neq 1$, temos,

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c.$$

Exemplo:

Resolva a equação real:

$$7^{4x+3} = 49.$$

Observe que

$$\begin{aligned} 7^{4x+3} = 49 &\Leftrightarrow 7^{4x+3} = 7^2 \\ &\Leftrightarrow 4x + 3 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = -1/4. \end{aligned} \tag{1}$$

Portanto,

$$S = \{-1/4\}.$$

Exercício: Resolva a inequação real:

$$(\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}(\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1} &\Leftrightarrow 2^{(1/2)(3x-1)} = 2^{(4/3)(2x-1)} \\&\Leftrightarrow \frac{3x-1}{2} = \frac{4(2x-1)}{3} \\&\Leftrightarrow 3(3x-1) = 2(4)(2x-1) \\&\Leftrightarrow 9x-3 = 16x-8 \\&\Leftrightarrow -7x = -5 \\&\Leftrightarrow x = 5/7.\end{aligned}\tag{2}$$

Portanto,

$$S = \{5/7\}.$$

Exercício: Resolva a equação real,

$$\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[3]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[3]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{5^{x-2}} \cdot \sqrt[3]{5^{2(2x-5)}} = \sqrt[2x]{5^{3x-2}} \\&\Leftrightarrow 5^{(x-2)/2} \cdot 5^{2(2x-5)/(3)} = 5^{(3x-2)/(2x)} \\&\Leftrightarrow 5^{[(x-2)/2 + 2(2x-5)/3]} = 5^{(3x-2)/(2x)} \\&\Leftrightarrow (x-2)/2 + 2(2x-5)/3 = (3x-2)/(2x) \\&\Leftrightarrow \frac{x(x-2) + 4(2x-5)}{2x} = \frac{3x-2}{2x} \\&\Leftrightarrow x^2 - 2x + 8x - 20 = 3x - 2 \\&\Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -6.\end{aligned}\tag{3}$$

Logo,

$$S = \{3, -6\}.$$

Exercício: Resolva equação exponencial real:

$$9^x + 3^{x+1} = 4.$$

Observe que

$$9^x + 3^{x+1} = 4 \Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x \cdot 3 = 4.\tag{4}$$

Defina $y = 3^x$.

Disto e da última equação, obtemos,

$$y^2 + 3y = 4,$$

ou seja,

$$y^2 + 3y - 4 = 0.$$

Logo,

$$y = 1 \text{ ou } y = -4.$$

$y = 3^x = -4$ não serve, pois $3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$y = 3^x = 1 = 3^0,$$

e portanto $x = 0$.

Logo, $S = \{0\}$.

3 Inequações Exponenciais

Seja $a > 1$. Assim

$$f(x) = a^x$$

é estritamente crescente e portanto,

$$a^b > a^c \Leftrightarrow b > c.$$

Seja $0 < a < 1$. Assim

$$f(x) = a^x$$

é estritamente decrescente e portanto,

$$a^b > a^c \Leftrightarrow b < c.$$

Exemplo:

Resolva a inequação exponencial real:

$$3^{2x+3} > 243.$$

Observe que

$$\begin{aligned} 3^{2x+3} > 243 &\Leftrightarrow 3^{2x+3} > 3^5 \\ &\Leftrightarrow 2x+3 > 5 \\ &\Leftrightarrow x > 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}.$$

Exercício: Resolva a inequação exponencial real:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2(2x+1)} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{3(x-3)} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{2}{3}\right)^{(3x-2)+2(2x+1)} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{3(x-3)} \\ \Leftrightarrow & 3x-2+4x+2 \geq 3x-9 \\ \Leftrightarrow & 4x \geq -9 \\ \Leftrightarrow & x \geq -9/4. \end{aligned} \tag{6}$$

Assim,

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -9/4\}.$$

Exercício: Resolva a inequação exponencial real:

$$2^x - 1 > 2^{1-x}.$$

Observe que

$$2^x - 1 > 2^{1-x} \Leftrightarrow 2^x - 1 > 2 \cdot 2^{-x}. \tag{7}$$

Agora defina $y = 2^x$.

Substituindo tal relação na última inequação, obtemos,

$$y - 1 > 2/y,$$

ou seja

$$y^2 - y > 2,$$

Isto é,

$$y^2 - y - 2 > 0.$$

Observe

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ ou } y = 2.$$

Examinemos o sinal de

$$f(y) = y^2 - y - 2.$$

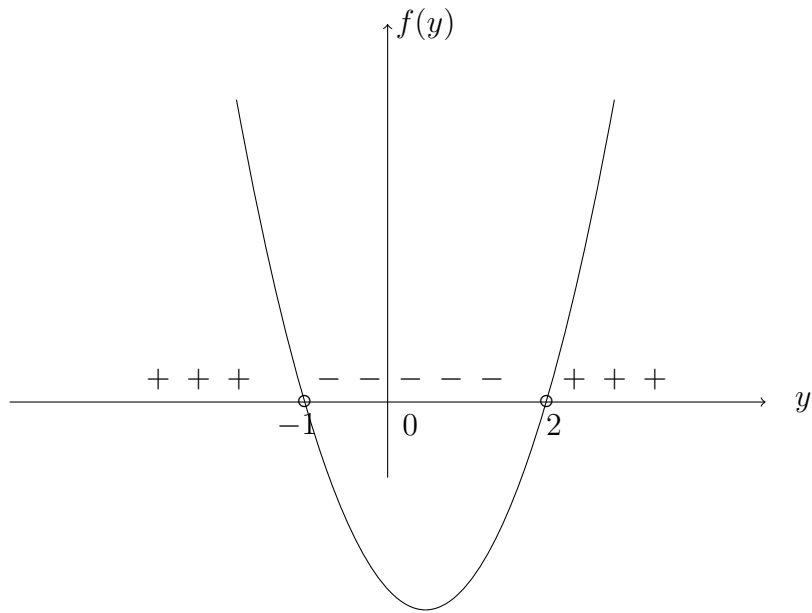


Figure 5: Sinal da função $f(y) = y^2 - y - 2$

Portanto, deve-se ter $y < -1$ ou $y > 2$

Observe que $y = 2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, portanto deve-se ter

$$y = 2^x > 2,$$

isto é,

$$x > 1.$$

Logo,

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}.$$