Cálculo 1 - Quinta Lista de Exercícios
Derivadas

Prof. Fabio Silva Botelho

November 2, 2017

1. Seja $f : D = \mathbb{R} \setminus \{-7/5\} \to \mathbb{R}$ onde
$$f(x) = \frac{1}{5x+7}.$$
Seja $x \in D$. Utilizando a definição de derivada, calcule $f'(x)$.
Calcule $f'(x)$ pelas regras de derivação e compare os resultados.

2. Seja $f : D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ onde
$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$
Seja $x \in D$. Utilizando a definição de derivada, calcule $f'(x)$.
Calcule $f'(x)$ pelas regras de derivação e compare os resultados.

3. Seja $f : D = (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ onde
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$
Seja $x \in D$. Utilizando a definição de derivada, calcule $f'(x)$.
Calcule $f'(x)$ pelas regras de derivação e compare os resultados.

4. Seja
$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right).$$
Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto correspondente a $x_0 = 1$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde
$$f(x) = e^{5x^4+2x+1}.$$
Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto correspondente a $x_0 = 1$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde
$$f(x) = 8^{x^5+3x^2+4x}.$$
Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto correspondente a $x_0 = 2$.

7. Seja
$$f(x) = \ln(2x+5).$$
Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f a qual é paralela à reta de equação
$$y = 3x - 7.$$

8. Seja
$$f(x) = \ln(x^2 + 2x).$$
Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f a qual é paralela à reta de equação
$$y = x + 4.$$

9. Seja
$$f(x) = 7^x.$$
Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f a qual é paralela à reta de equação
$$y = 2x + 1$$

10. Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função. Seja $x_0 \in (a,b)$. Definimos a derivada lateral à direita de x_0, denotada por $(f')^+(x_0)$, por
$$(f')^+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$
quando tal limite existe.

Similarmente, definimos a derivada lateral à esquerda de x_0, denotada por $(f')^-(x_0)$, por
$$(f')^-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$
quando tal limite existe.

Observe que para $f'(x_0)$ existir, é necessário e suficiente que $(f')^+(x_0)$ e $(f')^-(x_0)$ existam e que
$$(f')^+(x_0) = (f')^-(x_0).$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & \text{se } x < 2 \\ 3x + 3, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Calcule $(f')^+(2)$ e $(f')^-(2)$.

11. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{se } 0 < x < b \\ 1 - (1/4)x, & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

Obtenha $b > 0$ tal que f seja contínua em $(0, +\infty)$.

Calcule $(f')^+(b)$ e $(f')^-(b)$. O que se pode concluir sobre $f'(b)$.

12. Obtenha os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tais que f seja derivável em $x_0 = 1$, onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ ax + b, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

13. Ache os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tais que f seja derivável em $x_0 = 2$, onde

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{se } x < 2 \\ 2x^2 - 1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

14. Calcule as derivadas $f'(x)$, onde

(a)

$$f(x) = \cos^5(x^2 + 3x + 2)$$

(b)

$$f(x) = \operatorname{sen}^7(x^8 + 3x^2 + x)$$

(c)

$$f(x) = \operatorname{sen}^4(x^3 + 4x^2 + 1)\cos^2(x^2 + 1)$$

(d)

$$f(x) = \frac{x^2 + 8x}{\cos^2(x^2 + 1) + 3x}.$$

(e)

$$f(x) = \ln(x^2 + 3x)8^{x^9 + 10x + 1}$$

(f)

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x^5 + 8x + 2}\right)$$

(g)

$$f(x) = \frac{e^{3x^2 + 2x + 1}}{\ln(x^2 + 3x) + \cos^2(x^3 + 1)}$$

(h)

$$f(x) = \arctan(\ln(x^2 + 1))$$

(i)
$$f(x) = \operatorname{arcsen}(\sqrt{x^2+1})$$

(j)
$$f(x) = \tan^3(x^7+2x)e^{\operatorname{sen}^2(3x^2+1)}$$

(k)
$$f(x) = (x^5+3x^2+3)^{12}$$

(l)
$$f(x) = ((x^7+8x)^8+3x^2+1)^{10}$$

(m)
$$f(x) = \frac{1+\operatorname{sen} x}{3-\operatorname{sen} x}$$

(n)
$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x+5}{\cos x+5}$$

(o)
$$f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x+5}{\cos x+5}\right)^5$$

15. Seja $y(x)$ definida implicitamente pela equação
$$x^3+y^3 = 8xy.$$
Obtenha $y'(x)$.

16. Obtenha a equação da reta tangente à curva de equação
$$\sqrt[3]{xy} = 14x+y,$$
no ponto $(2,-32)$.

17. Obtenha a equação da reta normal à curva
$$x^2-x+y^2-3y = 0$$
no ponto $(2,2)$

18. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ onde
$$f(x) = x^3+x^2-x+1.$$
Determine onde f é crescente e onde f é decrescente.

Obtenha e classifique os pontos críticos de f de acordo com o teste da primeira derivada.

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 5.$$

Determine onde f é crescente e onde f é decrescente.

Obtenha e classifique os pontos críticos de f de acordo com o teste da segunda derivada.

20. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ onde

$$f(x) = \frac{x^2 + 8}{x + 1}.$$

Determine onde f é crescente e onde f é decrescente.

Obtenha e classifique os pontos críticos de f de acordo com o teste da primeira derivada.

21. Seja

$$f(x) = x^{4/5}(1 - x).$$

Determine onde f é crescente e onde f é decrescente.

Obtenha e classifique os pontos críticos de f de acordo com o teste da primeira derivada.

22. Seja

$$f(x) = x^{3/8}(5 - x).$$

Determine onde f é crescente e onde f é decrescente.

Obtenha e classifique os pontos críticos de f de acordo com o teste da primeira derivada.

23. Obtenha dois números reais positivos cuja soma é 100 e cujo produto tem o maior valor possível.

24. Obtenha dois números reais positivos cuja produto é 100 e cuja soma tem o menor valor possível.

25. Obtenha dois números reais positivos x e y tais que $2x + 5y = 100$ e cujo produto tem o maior valor possível.

26. Deseja-se construir uma caixa em forma de prisma retangular, com base quadrada de lado L e altura h, cujo volume é $5m^3$.

O material do fundo e da tampa custa 2 reais o m^2, ao passo que o material das laterais custa 5 reais o m^2.

Obtenha as dimensões L e h da caixa que minimizam o custo total do material.

27. Seja

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 2}.$$

Obtenha os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[-1, 2]$.

28. Seja

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x.$$

Obtenha $x_0 \in (1,3)$ tal que a conclusão do teorema do valor médio é válida em $[1,3]$.

29. Esboce os gráficos das seguintes funções $f(x)$, onde

(a)
$$f(x) = \frac{e^x}{x^2},$$

(b)
$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{x - 3}$$

(c)
$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 4}$$

(d)
$$f(x) = \frac{x + 5}{x - 7}.$$

30. Calcules os limites (aqui a utilização da regra de L'Hôspital é permitida)

(a)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^3}.$$

(b)
$$\lim_{x \to 0^+} (\ln x) x$$

(c)
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$$

(d)
$$\lim_{x \to 0^+} x^{3x^2 + 2x}$$

(e)
$$\lim_{x \to 0^+} (x^2 + 2x)^x$$

(f)
$$\lim_{x \to 0^+} (x^2 + 7x)^{x^2 + 2x}$$

(g)
$$\lim_{x \to +\infty} x^{1/x}$$

(h)
$$\lim_{x\to 0^+} (e^x + x)^{1/x}$$

(i)
$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$$

(j)
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$$

(k)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

(l)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$$

31. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ onde
$$f(x) = (x^2 + 3x)^{\ln x}.$$
Utilizando derivação logarítmica obtenha $f'(x)$.

32. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ onde
$$f(x) = (x + \cos x + 5)^{\,\mathrm{sen} x}.$$
Utilizando derivação logarítmica obtenha $f'(x)$.