Cálculo 1
Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

August 22, 2018

1. Utilizando a definição de limite, prove formalmente que:

   (a)
   $$\lim_{x\to -1} 5x+4=-1,$$

   (b)
   $$\lim_{x\to 2} -7x+3=-11,$$

   (c)
   $$\lim_{x\to -3} x^2+2x+1=4,$$

   (d)
   $$\lim_{x\to -2} 2x^2+7x-3=-9,$$

   (e)
   $$\lim_{x\to 1} x^3+2x^2+x-1=3,$$

   (f)
   $$\lim_{x\to 3} x^4-3x^2+x=57,$$

   (g)
   $$\lim_{x\to x_0} ax^2+bx+c=ax_0^2+bx_0+c,$$

   onde $x_0,a,b,c\in\mathbb{R}$ com $a\neq 0$.

   (h)
   $$\lim_{x\to 1} \frac{3x+1}{x+2}=\frac{4}{3},$$

   (i)
   $$\lim_{x\to x_0} ax^3+bx^2+cx+d=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d,$$

   onde $x_0,a,b,c,d\in\mathbb{R}$ com $a\neq 0$.

2. Seja $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ uma função e $x_0\in(a,b)$.

   Suponha
   $$\lim_{x\to x_0} g(x)=L\in\mathbb{R},$$
   onde $L\neq 0$.

   Prove formalmente que
   $$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{L}.$$

3. Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções e seja $x_0 \in (a, b)$. Suponha que existe $\delta_0 > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta_0$, então $f(x) \geq g(x)$.

   Suponha também que
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R},$$
   e
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}.$$
   Prove que $L \geq M$.

4. Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções e seja $x_0 \in (a, b)$. Suponha que
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R},$$
   e
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}.$$
   onde $L < M$.

   Prove que existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então
$$f(x) < \frac{L + M}{2} < g(x).$$

5. Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções tais que existem $\delta_0 > 0$ e $c > 0$ tais que se $0 < |x - x_0| < \delta_0$, então
$$|g(x)| \leq c,$$
   onde $x_0 \in (a, b)$.

   Suponha também que
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$
   Prove que
$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que
$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + 2x - 3)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right), & \text{se } x \neq 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases} \tag{1}$$
   Utilize o resultado do último exercício para calcular
$$\lim_{x \to 1} f(x).$$

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função onde
$$f(x) = \begin{cases} (\cos(\pi\, x/3) + 1)\ \text{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right), & \text{se } x < 3, \\ 1 & \text{se } x = 3, \\ \frac{\text{sen}(\alpha(x-3))}{x-3} + 5x^2 + 1, & \text{se } x > 3. \end{cases} \tag{2}$$
   Obtenha $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que
$$\lim_{x \to 3} f(x)$$
   exista.

8. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que
$$x < y + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$$
   Prove formalmente que $x \leq y$.