Cálculo 2 - Segunda Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

September 4, 2018

1. Calcule os limites:

   (a)
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}},$$

   (b)
   $$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2},$$

2. Utilizando a definição de limite, prove formalmente que:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(1,3)} 3x-5y+7=-5$,

   (b) $\lim_{(x,y)\to(-2,1)} -x+4y+4=10$,

   (c) $\lim_{(x,y)\to(1,3)} x^2+y^2-2x+1=9$,

   (d) $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} 4x^3+3x^2-2y^2-2x+3y+9=8$,

   (e) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^4y^3+y=10$.

3. Para as funções abaixo indicadas, mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe, onde

   (a)
   $$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

   (b)
   $$f(x,y)=\frac{xy}{|xy|},$$

   (c)
   $$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

   (d)
   $$f(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

(e)

$$f(x,y) = \frac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2}.$$

4. Para as funções $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ abaixo indicadas, mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe e calcule o seu valor, onde

   (a)

   $$f(x,y) = x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),$$

   (b)

   $$f(x,y) = \frac{x^2+3xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

   (c)

   $$f(x,y) = \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2},$$

   (d)

   $$f(x,y) = \cos\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right).$$

5. Para as funções $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ abaixo indicadas, calcule, se existir, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e discuta sobre a possibilidade ou não de tais funções serem estendidas continuamente para $(0,0)$, definindo apropriadamente $f(0,0)$, onde

   (a)

   $$f(x,y) = \ln\left(\frac{3x^4-x^2y^2+3y^4}{x^2+y^2}+2\right),$$

   (b)

   $$f(x,y) = \ln\left(x^2 cos^2\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+3\right).$$

6. Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

   Utilizando a definição de limite, prove formalmente que

   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} ax+by+c = ax_0+by_0+c.$$

7. Sejam $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$ onde $a \neq 0$, $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

   Utilizando a definição de limite, prove formalmente que

   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f = ax_0^2+by_0^2+cx_0y_0+dx_0+ey_0+f.$$

8. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não-vazio. Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ funções reais e seja $\mathbf{x_0} \in D'$.
   Suponha que existem $K > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $\mathbf{x} \in D$ e $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \delta$, então
   $$|g(\mathbf{x})| < K.$$
   Assuma
   $$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = 0.$$
   Sob tais hipóteses, prove que
   $$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) = 0.$$

9. Use o item 8 para provar que
   $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0,$$
   onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definida por
   $$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + x - y) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 5, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

10. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio e seja $\mathbf{x_0} \in D'$.
    Assuma que $f, g : D \to \mathbb{R}$ são tais que
    $$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$$
    e
    $$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} g(\mathbf{x}) = M \in \mathbb{R},$$
    onde $L < M$.
    Prove que existe $\delta > 0$ tal que se $\mathbf{x} \in D$ e $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \delta$, então
    $$f(\mathbf{x}) < \frac{L + M}{2} < g(\mathbf{x}).$$
    Dica: Defina $\varepsilon = \frac{M-L}{2}$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que
    $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}, & \text{se } x + y \neq 0 \\ 1, & \text{se } x + y = 0. \end{cases}$$
    Prove que f é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que
    $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
    Prove que f é contínua no $\mathbb{R}^2$.