Calculo 2 - 2018-2
Quarta Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

October 21, 2018

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y, t) = \frac{t^2 + y}{e^t + x^2 + t^2}.$$
Suponha que as funções $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sejam dadas por
$$x(t) = \cos^2(t^3),$$
e
$$y(t) = e^{t^2}.$$
Utilizando a regra da cadeia, calcule $g'(t)$ onde $g(t) = f(x(t), y(t), t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Finalmente, obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de g nos pontos $t = 0$ e $t = \pi$.

2. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + xy}{z^2 + e^x + cos^2(y)}.$$
Seja $z(x, y) = cos^2(x^2 + y^2)$ e defina $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por
$$h(x, y) = g(x, y, z(x, y)).$$
Utilize a regra da cadeia para calcular $h_x(x, y)$ e $h_y(x, y)$.
Obtenha a equação da reta normal e do plano tangente ao gráfico de h no ponto $(1, 0)$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Seja $u(x, y) = bx - ay$. Mostre que $z(x, y) = f(u(x, y))$ satisfaz à equação:
$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

   Denotando $u(r, \theta) = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ mostre que
   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r},$$
   e
   $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

5. Considere o plano $\pi\ :\ 2x+3y+z = 2$. Obtenha o ponto de π mais próximo do ponto $P(1, 1, 0)$.

6. Considere o elipsóide de equação
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
   onde $a, b, c > 0$.

   Obtenha os pontos de tal superfície que estão mais próximos da origem $(0, 0, 0)$.

7. Obtenha três números reais positivos cuja a soma 30 e cujo produto entre eles é máximo.

8. Obtenha três números reais positivos cujo produto é 30 e cuja a soma entre eles é mínima.

9. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que
   $$H(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right\}$$
   é uma matriz positiva definida, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Prove que nesse caso,
   $$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$
   e que se $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, então $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de mínimo global para f.

   Observação: Nesse caso pode-se mostar que f é convexa no $\mathbb{R}^n$.

10. Sejam $x \geq 0$ e $y \geq 0$, $p > 0$ e $q > 0$ tais que
    $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
    Prove que
    $$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$
    Sugestão: Fixe $y \geq 0$. Calcule o ponto de mínimo global de
    $$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy,$$
    em $[0, +\infty)$.

    Observe que f é convexa em $[0, \infty)$ assim o único ponto de extremo será um mínimio global.

11. Sejam $F, G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definidas por $F(x, y, u, v) = x^2 + y^3 - u + v^2$ e $G(x, y, u, v) = e^{2x} + e^{3y} + 2uv + 3v^2$. Assumindo as hipóteses do teorema da função implícita para funções vetoriais, considere as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ definidas implicitamente numa vizinhança de um ponto $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad e \quad G(x, y, u, v) = 0.$$

Obtenha $u_x,\ u_y,\ v_x$ e v_y.

12. Obtenha a equação do plano tangente à superfície de equação $z = f(x, y)$ no ponto $P(1, 1, 2)$, onde $z = f(x, y)$ é definida implicitamente mediante à equação

$$F(x, y, z) = z^3 + (x^2 + y^2)z - 12 = 0.$$

13. Considere as superfícies S_1 e S_2 de equações

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$$

e

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 8z^2 = 0.$$

Considere o ponto $P(2, 2, 1)$ na intersecção entre S_1 e S_2.

(a) Obtenha a equação da reta tangente à curva de intersecção entre S_1 e S_2 no ponto $P(2, 2, 1)$.

(b) Obtenha a equação do plano normal à curva de intersecção entre S_1 e S_2 no ponto $P(2, 2, 1)$.

14. Determine os pontos críticos de $z = f(x, y)$ definida implicitamente mediante à equação:

$$F(x, y, z) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2 - z^2 = 0.$$