

Cálculo Avançado - Oitava Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

June 24, 2016

1. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ uma região simples. Seja $\mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 .

Seja $\mathbf{x}_0 \in V^\circ$. Mostre que

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS}{\operatorname{Vol}(B_r(\mathbf{x}_0))},$$

onde \mathbf{n} denota o campo normal unitário exterior à $B_r(\mathbf{x}_0)$.

2. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ uma região simples. Seja $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 .

Seja $\mathbf{x}_0 \in V^\circ$. Utilizando a primeira identidade de Green, mostre que

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, dS}{\operatorname{Vol}(B_r(\mathbf{x}_0))},$$

onde \mathbf{n} denota o campo normal unitário exterior à $B_r(\mathbf{x}_0)$.

3. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície m-dimensional de classe C^2 , onde $1 \leq m < n$.

Sejam $X, Y, Z \in \tilde{\mathcal{X}}(M)$, onde $\tilde{\mathcal{X}}(M)$ denota o conjunto dos campos vetoriais tangenciais de classe C^∞ definidos em M . Mostre que

- (a) $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- (b) $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z]$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (c) (Feito em sala) Anti-simmetria:

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

- (d) (Feito em sala) Identidade de Jacob:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

- (e) Regra de Leibnitz:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X \cdot g)Y - g(Y \cdot f)X, \quad \forall f, g \in C^2(M).$$

(f) Relembrando que $L_X Y = [X, Y]$, mostre que

i.

$$L_X[Y, Z] = [L_X Y, Z] + [Y, L_X Z],$$

ii.

$$L_X(L_Y) - L_Y(L_X) = L_{[X, Y]}.$$

4. Considere a superfície $M \subset \mathbb{R}^4$ tridimensional definida por

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + \ln(w) = 1\}.$$

(a) Definindo $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$, escreva M parametricamente, isto é, no formato,

$$M = \{\mathbf{r}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3\}.$$

(b) Seja $p = \mathbf{r}(\mathbf{u})$. Obtenha a expressão do espaço tangente e a equação vetorial do hiper-plano tangente à M em p .

(c) Para $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ tais que

$$f(\mathbf{r}(\mathbf{u})) = x^2 + e^{x^2 y} + (\sin((x^2 + z^2))^3 + w(x, y, z)),$$

$$X(x, y, z) = e^x \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial y} + (x + z^2)^2 \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial z},$$

e

$$Y(x, y, z) = (\sin(xy))^2 \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial x} + (\cos(x^2 + y^2))^3 \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial y} + e^{x+z^2} \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial z},$$

para $p = \mathbf{r}(x_0, y_0, z_0)$, calcule

i. $(X \cdot f)(p)$,

ii. $(D_X Y)(p)$,

iii. $[X, Y](p)$,

iv. $([X, Y] \cdot f)(p)$

v. Compute numericamente os resultados obtidos nos 4 últimos ítems no ponto $p_0 = \mathbf{r}(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{r}(\pi, 0, 1)$.

(d) (Questão retificada) Seja $Z \in \mathcal{X}(M)$, onde

$$Z(x, y, z) = (x + y + z) \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial x} + (2x + y - z) \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial y} + (-y + z) \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial z}.$$

Obtenha a curva integral $r(\mathbf{u}(t))$ de Z , tal que $\mathbf{u}(0) = (1, -1, 0)$.

5. (Questão retificada) Obtenha a forma diferencial $dM(x, y, z)$ para o cálculo da área da superfície $M \subset \mathbb{R}^4$, onde

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : e^w = [\sin(x^2 + y)]^3 + z^2 + 5 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Observação: não é necessário calcular a área.

6. Considere a superfície $M \subset \mathbb{R}^4$ definida por

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : e^w - x^2 - y^2 - z^2 = 1\}.$$

Tendo escrito M parametricamente no formato,

$$M = \{\mathbf{r}(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\},$$

onde

$$\mathbf{r}(x, y, z) = X_1(x, y, z)\mathbf{e}_1 + \cdots + X_4(x, y, z)\mathbf{e}_4,$$

sejam

$$dX_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x} dx + \frac{\partial X_1}{\partial y} dy + \frac{\partial X_1}{\partial z} dz,$$

e

$$dX_4 = \frac{\partial X_4}{\partial x} dx + \frac{\partial X_4}{\partial y} dy + \frac{\partial X_4}{\partial z} dz.$$

(a) Calcule

$$(dX_1 \wedge dX_4)(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2),$$

onde

$$\mathbf{s}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial x} \Delta x,$$

e

$$\mathbf{s}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial y} \Delta y,$$

e onde $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$.

(b) Considere a forma diferencial

$$\omega = (w(x, y, z) + x^2y + z)dX_1 \wedge dX_4 + (w(x, y, z)^2 + \sin(x^2 + y) - z^2)dX_1 \wedge dX_2,$$

onde

$$dX_2 = \frac{\partial X_2}{\partial x} dx + \frac{\partial X_2}{\partial y} dy + \frac{\partial X_2}{\partial z} dz.$$

Obtenha a derivada exterior $d\omega$ de ω em $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$, onde

$$\mathbf{s}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial x} \Delta x,$$

$$\mathbf{s}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial y} \Delta y,$$

$$\mathbf{s}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial z} \Delta z,$$

e onde $\Delta x, \Delta y, \Delta z \in \mathbb{R}$.