Cálculo IV - Primeira Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

August 17, 2015

1. Coloque na forma algébrica:
   (a) $z = (3+2i) \cdot (2+5i)$
   (b) $z = \frac{(4-3i)}{7-i}$
   (c) $z = \frac{(2+i)(3+5i)}{1-i}$.
2. Sendo $u = 4+3i$ e $v = 5-2i$ coloque na forma algébrica:
   (a) $z = u \cdot v + u - 2v$,
   (b) $z = \frac{u}{v} + u + v$.
3. Prove que $(1+i)^2 = 2i$ e utilize tal resultado par colocar z na forma algébrica, onde:
   $$z = (1+i)^{80} - (1+i)^{82}.$$
4. Calcule,
   (a) i^{84},
   (b) i^{110},
   (c) i^{503},
   (d) $(1+i)^{12} - (1-i)^{12}$.
5. Obtenha $x, y \in \mathbb{R}$ tais que:
   (a) $(x+yi)(2+3i) = 1+8i$,
   (b) $(x+yi)^2 = 2i$
6. Coloque na forma algébrica $z = a+bi$ os números complexos:
   (a) $\frac{1}{i}$,
   (b) $\frac{1+i}{1-i}$,
   (c) $\frac{i^3-i^2+i^{17}-i^{35}}{i^{16}-i^{13}+i^{30}}$.

7. Para cada $z \in \mathbb{C}$ abaixo indicado, obtenha o respectivo conjugado $\overline{z}$:
    (a) $z = \frac{1+i}{i}$,
    (b) $z = \frac{1+3i}{2-i}$.
8. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $u = x + yi$. Seja
$$v = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
calcule $Re(z)$ onde $z = -v \cdot \overline{u}$.
9. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que
$$z = \frac{2 - xi}{1 + 2xi}$$
seja imaginário puro.
10. Resolva as equações
    (a) $z\overline{z} + z - \overline{z} = 13 + 6i$,
    (b) $z^3 = \overline{z}$.
11. Coloque os números abaixo indicados na forma polar e represente-os no plano complexo:
    (a) $z = 1 + \sqrt{3}i$,
    (b) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$,
    (c) $z = 2i(1 - i)$.
12. Calcule o módulo dos números complexos abaixo indicados:
    (a) $z = \frac{3-4i}{2+i}$,
    (b) $z = \frac{a+bi}{a-bi}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
    (c)
    $$z = \frac{1}{1 + i\tan(x)},$$
    onde $x \neq \pi/2 + K\pi, \forall K \in \mathbb{Z}$.
    (d) $z = (1 + i)^3$,
    (e) $z = \frac{1+i}{2-2i}$,
    (f) $z = \frac{5i}{3+4i}$.
13. Coloque os números complexos abaixo indicados na forma polar:
    (a)
    $$z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{100},$$

(b) $z = (3-3i)^{-12}$,

(c) $z = (\sqrt{3}+i)^{20}$.

14. Calcule as raízes:

(a) $\sqrt{6+12i}$,
Observação: Você pode deixar indicado, como no presente item para $z = 6+12i = re^{i\theta}$, que $\theta = \arctan(2)$, onde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta_0 = \theta/2$, etc.

(b) $\sqrt[6]{i}$,

(c) $\sqrt[3]{1+i}$,

(d) $\sqrt[4]{96-24i}$.

15. Represente analiticamente e esboce no plano complexo os seguintes conjuntos:

(a) $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-2+2i| = 10\}$.

(b) $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 5 < |z-3+i| \leq 12\}$.

(c) $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z+2|^2 + |z-2|^2 < 12\}$.

(d) Exercício retificado:

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z+2i|^2 + |z-3|^2 \leq 15\}.$$

(e) $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z+1| + |z-1| \leq 8\}$.

(f) $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-1| \leq |z|\}$.

(g) $D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-i|^2 + |z+i|^2 < 2\}$.

16. Seja $a \in \mathbb{C}$ e $\rho > 0$. Mostre que o conjunto D representa uma circunferência de centro em a e raio ρ, onde,

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z|^2 - 2Re(\overline{a}z) + |a|^2 = \rho^2\}.$$

17. Prove que

$$|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

18. Sejam $a, z \in \mathbb{C}$ tais que $|z| = 1$ e $1 - \overline{a}z \neq 0$. Mostre que

$$\frac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|} = 1.$$

19. Seja $\rho > 0$ tal que $\rho \neq 1$. Fixemos $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Mostre que o conjunto D é uma circunferência, onde

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-z_0| = \rho|z-z_1|\}.$$

Represente analiticamente o conjunto D quando $\rho = 1$.