Cálculo IV - Segunda Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

August 16, 2015

1. Obtenha o domínio (natural) para cada uma das expressões complexas abaixo indicadas.

   (a)
   $$f(z) = \frac{1}{z^3 + 1},$$

   (b)
   $$f(z) = \frac{1}{(\overline{z} + 1)^3 + i},$$

   (c)
   $$f(z) = \frac{1}{|z - i|^2 + |z - 2|^2 - 8},$$

   (d)
   $$f(z) = \ln(|z - 5i|^2 + |z - 2|^2 - 50).$$

2. Denotando $z = x + iy$, obtenha $Re(f(z))$ e $Im(f(z))$ para cada uma das funções abaixo indicadas:

   (a) $f(z) = z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}$.

   (b) $f(z) = z^3 + z + 1$,

   (c) $f(z) = Re(z^2) + \overline{z}^2 - 3z + 1$,

3. Para cada uma das funções $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, observando que
   $$x = Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2},$$
   e
   $$y = Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$
   escreva $f(z)$ em termos de z:

   (a) $f(z) = x^2 + y^2 + i(2x)$,

   (b) $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$.

4. Para cada uma das funções abaixo indicadas, denotando $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, escreva $f(z)$ na forma:
   $$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta),$$
   onde

   (a) $f(z) = z^2 + \overline{z}$,

   (b) $f(z) = z + \frac{1}{z},\ z \neq 0$.

5. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função complexa, onde denotamos $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ e $z = x + iy$.

   Sejam $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ e $L = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C}$.

   Mostre que
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L$$
   se, e somente se,
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

6. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 \neq 0$.

   (a) Prove que
$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0}.$$
   (b) Prove por indução que
$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z_0^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

7. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $z_0 \in D$ e, $f : D \to \mathbb{C}$ e $g : D \to \mathbb{C}$ funções tais que
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$$
   e
$$\lim_{z\to z_0} g(z) = M \in \mathbb{C}.$$
   Prove que:

   (a) $\lim_{z\to z_0} cf(z) = cL, \;\; \forall c \in \mathbb{C}$,

   (b) Prove que
$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{M}, \quad \text{se } M \neq 0.$$
   Utilize tal resultado e a propriedade da multiplicação para concluir que
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}, \quad \text{se } M \neq 0.$$

8. Prove formalmente que

   (a) $\lim_{z\to z_0} Re(z) = Re(z_0)$,

   (b) $\lim_{z\to z_0} \overline{z} = \overline{z}_0$,

   (c) $\lim_{z\to 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i, \;\; (z = x + iy)$.

9. Prove que se $\lim_{z\to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$ então
$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |L|.$$

10. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $z_0 \in D$ e $f, g : D \to \mathbb{C}$ funções complexas.

    Assuma que existam $K > 0$ e $\delta > 0$ tais que $|g(z)| < K$, se $0 < |z - z_0| < \delta$.

    Suponha também que $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$.

    Sob tais hipóteses, mostre que
$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0.$$
    Utilize tal resultado e o item (8b) para provar que
$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}^2}{z} = 0.$$