Cálculo IV - Terceira Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

August 26, 2015

1. Utilizando a definição de derivada, obtenha $f'(z)$ para as funções abaixo indicadas, onde
   (a) $f(z) = 5z^2 + (i+1)z + 3$,
   (b) $f(z) = az^2 + bz + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{C}$.
   (c) $f(z) = z^3$,
   (d) $f(z) = \frac{1}{z}$, onde $z \neq 0$.
2. Utilizando a regra da cadeia e as propriedades de derivadas, calcule $f'(z)$ para as funções abaixo indicadas:
   (a) $f(z) = (z^3 + 3z^2 + 5z)^{10}$.
   (b) $f(z) = (z^2 + 7z)^8 (z^7 + 8z^5 + 1)^{10}$
   (c) $f(z) = (z^3 + 3z + +z)^5 (z^5 + 6z)^9 (z^7 + 4z^3 + i)^4$
   (d) $f(z) = \frac{(z^2+5)^4}{(z^4+6z^3+2)^3}$.
3. No item (1d), você calculou $f'(z)$, para $f(z) = \frac{1}{z}$. Utilize tal resultado para provar por indução que
$$\frac{d(z^{-n})}{dz} = -nz^{-n-1}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
4. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e sejam $f, g : D \to \mathbb{C}$ funções tais que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, onde $z_0 \in D$.
   Assuma também que $f'(z_0)$ e $g'(z_0)$ existam.
   Sob tais hipóteses, prove que:
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$
   Sugestão: Escreva $f'(z_0)$ e $g'(z_0)$ mediande a definição de derivada.
5. Para as funções $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ abaixo indicadas, mostre que $f'(z)$ não existe, $\forall z \in \mathbb{C}$:
   (a) $f(z) = \overline{z}$
   (b) $f(z) = Re(z)$.
6. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ abaixo indicada. Mostre que $f'(0)$ não existe, onde:
$$f(z) = \begin{cases} \frac{\overline{z}^2}{z}, & \text{se } z \neq 0, \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$