# Cálculo IV - Quarta Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

August 31, 2015

1. Para as funções abaixo indicadas, determine os seus domínios, escreva-as no formato $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, verifique em que pontos as equações de Cauchy-Riemann e demais condições suficientes de diferenciabilidade são satisfeitas e, em tais pontos, calcule $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$. Finalmente, quando for o caso, compare tais resultados com os obtidos pelas regras de derivação usuais.

   (a) $f(z) = z^2 + (i + 1)z$,
   (b) $f(z) = \frac{1}{z}$,
   (c) $f(z) = \overline{z}^2 + z + i$.
   (d) $f(z) = \frac{2z+i}{z^2-1}$,
   (e) $f(z) = \frac{1+i}{z^3+1}$,
   (f) $f(z) = e^{z^2+iz}$,

2. Mediante uma análise das equações de Cauchy-Riemann, mostre que $f'(z)$ não existe $\forall z \in \mathbb{C}$, para cada uma das funções abaixo indicadas, onde:

   (a) $f(z) = 2z^2 - \overline{z}$,
   (b) $f(z) = 2x + ixy^2$.

3. Para as funções abaixo indicadas, onde denotamos $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, determine os seus domínios e em que pontos $f'(z)$ existe. Obtenha as respectivas expressões para $f'(z)$ em tais pontos. Finalmente, denotando

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2},$$

   e

$$y = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

   escreva tais funções em termos de $z$, onde:

   (a) $f(z) = \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2-1} + \frac{y}{x^2+y^2-1}i$,
   (b) $f(z) = x^2 + y^2 + y + 2x + (x + 2y + 2)i$.

4. Seja $f(z) = x^2 + iy^2$. Determine em que subconjunto de $\mathbb{C}$ a derivada $f'(z)$ existe. Otenha $f'(z)$ para tais pontos.

5. Considere as funções abaixo indicadas, onde denotamos $z = re^{i\theta}$. Prove que $f'(z)$ existe em cada respectivo domínio e determine a sua expressão, onde:

   (a) $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, onde $r > 0$ e $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$.
   (b) $f(z) = e^{-\theta}\cos(\ln r) + ie^{-\theta}\sin(\ln r)$, onde $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$.