Cálculo IV - Quinta Lista de Exercícios (Retificada)

Prof. Fabio Silva Botelho

November 4, 2015

1. Obtenha todos os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que:
   (a) $e^z = -3$,
   (b) $e^z = -1 + \sqrt{3}i$
   (c) $e^{(2z-1)} = 1$.
2. Denote $z = x + yi$ e escreva $\left|e^{(2z+i)}\right|$ e $\left|e^{\left(iz^2\right)}\right|$ em termos de x e y. Finalmente, mostre que
$$\left|e^{(2z+i)} + e^{\left(iz^2\right)}\right| \leq e^{2x} + e^{2xy}.$$
3. Prove que $\left|e^{\left(z^2\right)}\right| \leq e^{\left|z^2\right|}, \forall z \in \mathbb{C}$.
4. Mostre que:
   (a) $Log(-ei) = 1 - \frac{\pi}{2}i$,
   (b) $Log(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}i$,
5. Obtenha, no contexto de números complexos,
   (a) $log(e)$,
   (b) $log(i)$
   (c) $log(1+i)$
6. Denotando $z = x + yi$, mostre que,
$$Re[log(z-1)] = \frac{1}{2}\ln[(x-1)^2 + y^2].$$
7. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Mostre que
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2).$$
8. Prove que
$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}.$$
9. Calcule
$$I = \int_\Gamma Im(z)\, dz,$$
onde
$$\Gamma(t) = 2e^{-it}, \ \ \forall t \in [0, 2\pi].$$

10. Calcule
$$I = \int_\Gamma f(z)\, dz,$$
onde
$$f(z) = \overline{z}^2,$$
e
$$\Gamma(t) = t^4 + it,\ \forall t \in [0, 1].$$

11. Seja
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
tal que
$$f(z) = z^2 e^{\left(z^3\right)},\quad \forall z \in \mathbb{C}.$$
Calcule
$$I = \int_\Gamma f(z)\, dz$$
onde
$$\Gamma(t) = e^{it},\quad \forall t \in [0, \pi].$$

12. Seja Γ o segmento que conecta os pontos $z = i$ e $z = 1$ no plano complexo.
Mostre, sem calcular a integral, que
$$\left| \int_\Gamma \frac{dz}{z^4} \right| \leq 4\sqrt{2}.$$

13. Seja $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| = R > 1\}$.
Mostre que
$$\left| \oint_\Gamma \frac{Log z}{z^2}\, dz \right| \leq 2\pi \left(\frac{\pi + \ln(R)}{R} \right).$$
Finalmente, use a regra de L'Hospital para mostrar que a integral em questão tende a *zero* quando $R \to +\infty$.

14. Seja $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho fechado e seja $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 \notin \Gamma$.
Prove que
$$\int_\Gamma \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz = 0,\quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Sugestão: É importante observar que $0 \notin \mathbb{N}$. Obtenha $F(z)$ tal que $F'(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$.

15. Aplique o Teorema de Cauchy-Goursat para mostrar que
$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$
para as funções $f(z)$ abaixo indicadas, onde
$$\Gamma(t) = e^{it}, \forall t \in [0, 2\pi],$$
e onde,
   (a) $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$,
   (b) $f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$,
   (c) $f(z) = Log(z + 2)$.

Observação: Neste exercício, você tem que mostrar que $f'(z)$ existe num domínio simplesmente conexo que contém Γ. Você pode fazer isso apresentando $f'(z)$ para cada item.

16. Calcule
$$I = \int_\Gamma \frac{z}{z^2-1}\, dz$$
onde $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ é dada por $\Gamma(t) = 2e^{it}, \ \ \forall t \in [0, 2\pi]$.
Sugestão: Obtenha $A, B \in \mathbb{C}$ tais que
$$\frac{z}{z^2-1} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1}.$$

17. Seja $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, onde $\Gamma(t) = 3e^{it}, \ \ \forall t \in [0, 2\pi]$.
Utilizando a fórmula integral de Cauchy, calcule as integrais abaixo indicadas:
   (a) Questão retificada:
   $$I = \int_\Gamma \frac{e^{(z^2)}}{z + \pi i/2}\, dz,$$
   (b)
   $$I = \int_\Gamma \frac{\sin(z)}{(z+\pi/2)(z^3+50)}\, dz,$$
   (c)
   $$I = \int_\Gamma \frac{\cos(z)}{z^4}\, dz,$$
   (d) Questão retificada:
   $$I = \int_\Gamma \frac{\tan(z/4)}{(z-\pi/2)^3}\, dz,$$

18. Para
$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - i| = 2\},$$
mostre que
   (a) $\int_\Gamma \frac{1}{z^2+4}\, dz = \frac{\pi}{2}$,
   (b) $\int_\Gamma \frac{1}{(z^2+4)^2}\, dz = \frac{\pi}{16}$.