Cálculo IV - Sexta Lista de Exercícios (Retificada)

Prof. Fabio Silva Botelho

November 4, 2015

Observação: A orientação dos caminhos fechados é sempre no sentido anti-horário.

1. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica no domínio simplesmente conexo D. Seja Γ um caminho fechado contido em D. Seja $z_0 \in D$ um ponto no interior à região delimitada por Γ (portanto $z_0 \notin \Gamma$).

   Utilizando a fórmula integral de Cauchy e respectivas extensões, mostre que

$$\oint_\Gamma \frac{f''(z)}{z - z_0}\, dz = 2! \oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\, dz.$$

2. Obtenha a série de Laurent de

$$f(z) = z^4 \sin\left(\frac{1}{z}\right),$$

   centrada em $z = 0$. Determine em que região do plano complexo ela é válida e com tais resultados, calcule

$$I = \oint_\Gamma f(z)\, dz,$$

   onde

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}.$$

3. Seja

$$f(z) = \frac{1}{2z(z-5)}.$$

   Obtenha a série de Laurent de f centrada em $z = 5$ e determine em que subconjunto de $\mathbb{C}$ ela é válida. Utilizando tal resultado e o teorema dos resíduos de Cauchy, calcule

$$I = \oint_\Gamma f(z)\, dz,$$

   onde

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - 5| = 1\}.$$

4. Seja

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z+5)}.$$

   Obtenha a série de Laurent de f centrada em $z = 1$. Finalmente, utilizando o teorema dos resíduos, calcule

$$I = \oint_\Gamma f(z)\, dz,$$

   onde

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - 1| = 1\}.$$

5. Seja
$$f(z) = \frac{4z+3}{(z+5)(z-1)}.$$
   (a) Obtenha a série de Laurent de f centrada em $z = 1$ e calcule
   $$I = \oint_\Gamma f(z)\, dz,$$
   onde
   $$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-1| = 1\}.$$
   (b) (Item retificado)
   Obtenha a série de Laurent de f centrada em $z = -5$ e calcule
   $$I = \oint_\Gamma f(z)\, dz,$$
   onde
   $$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+5| = 1\}.$$
   (c) Calcule
   $$I = \oint_\Gamma f(z)\, dz,$$
   onde
   $$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 7\}.$$

   Sugestão: Obtenha A, $B \in \mathbb{C}$ tais que
   $$f(z) = \frac{A}{z+5} + \frac{B}{z-1}.$$

6. Utilizando os resultados sobre resíduos vistos em aula, para
$$f(z) = \frac{z+5}{(z^2+16)(z-i)^2},$$
   calcule
   (a)
   $$I = \oint_\Gamma f(z)\, dz,$$
   onde
   $$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-4i| = 1\},$$
   (b)
   $$I = \oint_\Gamma f(z)\, dz,$$
   onde
   $$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-i| = 1\}.$$
   (c)
   $$I = \oint_\Gamma f(z)\, dz,$$
   onde
   $$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 5\}.$$

7. Obtenha a Série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)},$$

centrada em $z = 3$ e com tal resultado calcule

$$I = \oint_\Gamma f(z)\, dz,$$

onde

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \; : \; |z-3| = 1\}.$$