# Cálculo Variacional - Primeiras Aulas Espaços de Banach e Variação à Gâteaux Tópicos de Análise Funcional e Convexa

Prof. Fabio Silva Botelho

May 23, 2018

## 1 Espaços de Banach

Começamos com a definição de norma.

**Definição 1.1.** *Seja $V$ um espaço vetorial. Uma norma em $V$ é uma função denotada por $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, para a qual valem as seguintes propriedades.*

1.
$$\|u\|_V \geq 0, \forall u \in V$$
*e*
$$\|u\|_V = 0, \text{ se, e somente se } u = \mathbf{0}.$$

2. *Desigualdade triangular, isto é*
$$\|u + v\|_V \leq \|u\|_V + \|v\|_V, \ \forall u, v \in V$$

3.
$$\|\alpha u\|_V = |\alpha| \|u\|, \ \forall u \in V, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

*Nesse caso dizemos que o espaço $V$ é um espaço normado.*

**Definição 1.2** (Sequência convergente)**.** *Seja $V$ um espaço normado e seja $\{u_n\} \subset V$ uma sequência. Dizemos que $\{u_n\}$ converge para $u_0 \in V$, quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então*
$$\|u_n - u_0\|_V < \varepsilon.$$

*Nesse caso escrevemos,*

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u_0, \text{ em norma.}$$

**Definição 1.3** (Sequência de Cauchy)**.** *Seja $V$ um espaço normado e seja $\{u_n\} \subset V$ uma sequência.*

*Dizemos que $\{u_n\}$ é de Cauchy, quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$, então*

$$\|u_n - u_m\|_V < \varepsilon.$$

**Definição 1.4** (Espaço de Banach)**.** *Um espaço normado $V$ é dito ser de Banach quando é completo, isto é, quando para cada sequência de Cauchy $\{u_n\} \subset V$ existe $u_0 \in V$ tal que*

$$\|u_n - u_0\|_V \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

**Exemplo 1.5.** *Exemplo de Espaço de Banach:*

*Considere $V = C([a,b])$, o espaço das funções contínuas em $[a,b]$. Provaremos que tal espaço é de Banach com a norma,*

$$\|f\|_V = \max\{|f(x)| \ : \ x \in [a,b]\}.$$

**Exercício 1.6.** *Prove que*

$$\|f\|_V = \max\{|f(x)| \ : \ x \in [a,b]\}$$

*é uma norma para $V = C([a,b])$.*

Solução:

1. Claramente

$$\|f\|_V \geq 0, \forall f \in V$$

e

$$\|f\|_V = 0 \text{ se, e somente se } f(x) = 0, \ \forall x \in [a,b],$$

$$\text{isto é se, e somente se } f = \mathbf{0}.$$

2. Sejam $f, g \in V$.

Assim

$$\begin{aligned} \|f+g\|_V &= \max\{|f(x)+g(x)|, \ x \in [a,b]\} \\ &\leq \max\{|f(x)|+|g(x)|, \ x \in [a,b]\} \\ &\leq \max\{|f(x)|, \ x \in [a,b]\} + \max\{|g(x)| \ x \in [a,b]\} \\ &= \|f\|_V + \|g\|_V. \end{aligned} \tag{1}$$

3. Finalmente, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in V$.

Logo,

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_V &= \max\{|\alpha f(x)|, \ x \in [a,b]\} \\ &= \max\{|\alpha||f(x)|, \ x \in [a,b]\} \\ &= |\alpha| \max\{|f(x)|, \ x \in [a,b]\} \\ &= |\alpha|\|f\|. \end{aligned} \tag{2}$$

Disto podemos concluir que $\|\cdot\|_V$ é uma norma.

A solução está completa.

**Teorema 1.7.** *$V = C([a,b])$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|f\|_V = \max\{|f(x)| \ : \ x \in [a,b]\}, \ \forall f \in V.$$

***Prova***. A prova de que $C([a,b])$ é um espaço vetorial é deixada como exercício.

Da última proposição $\|\cdot\|_V$ é uma norma para $V$.

Seja $\{f_n\} \subset V$ uma sequência de Cauchy.

Provaremos que existe $f \in V$ tal que

$$\|f_n - f\|_V \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Seja $\varepsilon > 0$.

Assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$, então

$$\|f_n - f_m\|_V < \varepsilon.$$

Logo

$$\max\{|f_n(x) - f_m(x)| \ : \ x \in [a,b]\} < \varepsilon,$$

ou seja

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in [a,b], \ m, n > n_0. \tag{3}$$

Seja $x \in [a,b]$.

De (3), $\{f_n(x)\}$ é uma sequência de Cauchy, portanto convergente.

Defina então

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \ \forall x \in [a,b].$$

Também de (3), temos que

$$\lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall n > n_0.$$

Disto conclui-se que

$$\|f_n - f\|_V \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Provaremos agora que $f$ é contínua em $[a,b]$.

Do exposto acima

$$f_n \to f$$

uniformemente em $[a,b]$ quando $n \to \infty$.

Logo, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_1$, então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in [a,b].$$

Escolha $n_2 > n_1$.

Seja $x \in [a,b]$. De

$$\lim_{y \to x} f_{n_2}(y) = f_{n_2}(x),$$

existe $\delta > 0$ tal que se $y \in [a,b]$ e $|y-x| < \delta$ então

$$|f_{n_2}(y) - f_{n_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Logo se $y \in [a,b]$ e $|y-x| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |f(y)-f(x)| &= |f(y) - f_{n_2}(y) + f_{n_2}(y) - f_{n_2}(x) + f_{n_2}(x) - f(x)| \\ &\leq |f(y) - f_{n_2}(y)| + |f_{n_2}(y) - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{4}$$

Podemos concluir que $f$ é contínua em $x$, $\forall x \in [a,b]$, ou seja $f \in V$.

A prova está completa. $\square$

**Exercício 1.8.** *Seja $V = C^1([a,b])$ o espaço das funções cuja a derivada é contínua em $[a,b]$.*

*Defina a função (de fato funcional) $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}^+$ por*

$$\|f\|_V = \max\{|f(x)| + |f'(x)| \ : \ x \in [a,b]\}.$$

1. *Prove que $\|\cdot\|_V$ é uma norma.*

2. *Prove que $V$ constitui-se num espaço de Banach com tal norma.*

*Solução: A prova do item 1 é deixada a cargo do leitor.*

*Provaremos agora que $V$ é completo.*

*Seja $\{f_n\} \subset V$ uma sequência de Cauchy.*

*Seja $\varepsilon > 0$. Assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m,n > n_0$ então*

$$\|f_n - f_m\|_V < \varepsilon/2.$$

*Portanto,*

$$|f_n(x) - f_m(x)| + |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon/2, \ \forall x \in [a,b], \ m,n > n_0. \tag{5}$$

*Seja $x \in [a,b]$. Logo, $\{f_n(x)\}$ e $\{f_n'(x)\}$ são sequências reais de Cauchy, portanto convergentes.*

*Denotemos então*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

*e*

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x).$$

*Disto e (5), obtemos*

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| + |f_n'(x) - g(x)| &= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| + |f_n'(x) - f_m'(x)| \\ &\leq \varepsilon/2, \ \forall x \in [a,b], \ n > n_0. \end{aligned} \tag{6}$$

*Similarmente ao obtido no último exemplo, podemos obter que $f$ e $g$ são contínuas, e portanto uniformememte contínuas no compacto $[a,b]$.*

*Logo, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in [a,b]$ e $|y - x| < \delta$, então*

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon/2. \tag{7}$$

*Escolha $n_1 > n_0$. Seja $x \in (a,b)$.*

*Assim, se $0 < |h| < \delta$, então de (6) e (7) obtemos*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f_{n_1}(x+h) - f_{n_1}(x)}{h} - g(x) \right| \\ = \ & |f_{n_1}'(x+th) - g(x+th) + g(x+th) - g(x)| \\ \leq \ & |f_{n_1}'(x+th) - g(x+th)| + |g(x+th) - g(x)| \\ < \ & \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ = \ & \varepsilon, \end{aligned} \tag{8}$$

*onde do teorema do valor médio $t \in (0,1)$ (depende de $h$). Logo, fazendo $n_1 \to \infty$, obtemos*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f_{n_1}(x+h) - f_{n_1}(x)}{h} - g(x) \right| \\ \to \ & \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| \\ \leq \ & \varepsilon, \forall 0 < |h| < \delta. \end{aligned} \tag{9}$$

*Disto podemos concluir que*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x), \ \forall x \in (a,b).$$

*Os casos em que $x = a$ ou $x = b$ são tratados similarmente com limites laterais.*

*Disto e (6), obtemos*

$$\|f_n - f\|_V \to 0, \ \textit{quando } n \to \infty$$

*e*

$$f \in C^1([a,b]).$$

*A solução está completa.*

**Definição 1.9** (Funcional)**.** *Seja $V$ um espaço de Banach. Um funcional $F$ definido em $V$ é uma função cujo contra-domínio é $\mathbb{R}$ ($F : V \to \mathbb{R}$).*

**Exemplo 1.10.** *Seja $V = C([a,b])$ e $F : V \to \mathbb{R}$ onde*

$$F(y) = \int_a^b ( \, sen^3 x + y(x)^2) \, dx, \; \forall y \in V.$$

**Exemplo 1.11.** *Seja $V = C^1([a,b])$ e seja $J : V \to \mathbb{R}$ onde*

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx, \; \forall y \in C^1([a,b]).$$

Em nosso primeiro formato de trabalho consideraremos funcionais definidos por

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) \, dx,$$

onde assumiremos

$$f \in C([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

e $V = C^1([a,b])$.

Assim, para $F : D \subset V \to \mathbb{R}$ onde

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) \, dx,$$

$$V = C^1([a,b]),$$

e

$$D = \{y \in V \; : \; y(a) = A \text{ e } y(b) = B\},$$

onde $A, B \in \mathbb{R}$.

Observe que se $y \in D$, então $y + v \in D$ se, e somente se, $v \in V$ e

$$v(a) = v(b) = 0.$$

Pois nesse caso,

$$y + v \in V$$

e

$$y(a) + v(a) = y(a) = A,$$

e

$$y(b) + v(b) = y(b) = B.$$

Definiremos o espaço das variações admissíveis para $F$, denotado por $V_a$, como,

$$V_a = \{v \in V \; : \; v(a) = v(b) = 0\}.$$

**Definição 1.12** (Mínimo global). *Seja $V$ um espaço de Banach e seja $F : D \subset V \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que $y_0 \in D$ é um ponto de mímino global para $F$, quando*

$$F(y_0) \leq F(y),\ \forall y \in D.$$

Observe que denotando $y = y_0 + v$ onde $v \in V_a$, temos que

$$F(y_0) \leq F(y_0 + v),\ \forall v \in V_a.$$

**Exemplo 1.13.** *Considere $J : D \subset V \to \mathbb{R}$ onde $V = C^1([a, b])$,*

$$D = \{y \in V\ :\ y(a) = 0 \ e\ y(b) = 1\}$$

*e*

$$J(y) = \int_a^b (y'(x))^2\, dx.$$

*Assim,*

$$V_a = \{v \in V\ :\ v(a) = v(b) = 0\}.$$

*Seja $y_0 \in D$ um candidato a mínimo global para $F$ e seja $v \in V_a$ uma direção admissível. Logo, deve-se ter,*

$$J(y_0 + v) - J(y_0) \geq 0, \tag{10}$$

*onde*

$$\begin{aligned} J(y_0 + v) - J(y_0) &= \int_a^b (y_0'(x) + v'(x))^2\, dx - \int_a^b y_0'(x)^2\, dx \\ &= 2\int_a^b y_0'(x)v'(x)\, dx + \int_a^b v'(x)^2\, dx \\ &\geq 2\int_a^b y_0'(x)v'(x)\, dx. \end{aligned} \tag{11}$$

*Observe que se $y_0'(x) = c$ em $[a, b]$, teremos (10) satisfeita, pois nesse caso,*

$$\begin{aligned} J(y_0 + v) - J(y_0) &\geq 2\int_a^b y_0'(x)v'(x)\, dx \\ &= 2c\int_a^b v'(x)\, dx \\ &= 2c[v(x)]_a^b \\ &= 2c(v(b) - v(a)) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

*Resumindo, se $y_0'(x) = c$ em $[a, b]$, obtemos,*

$$J(y_0 + v) \geq J(y_0),\ \forall v \in V_a.$$

*Observe que nesse caso,*

$$y_0(x) = cx + d,$$

*para algum* $d \in \mathbb{R}$.

*Entretanto, de*

$$y(a) = 0, \text{ obtemos } ca + d = 0.$$

*De* $y_0(b) = 1$, *obtemos* $cb + d = 1$.

*Resolvendo este último sistema em* $c$ *e* $d$ *obtemos,*

$$c = \frac{1}{b-a},$$

*e*

$$d = \frac{-a}{b-a}.$$

*Finalmente, disto obtemos,*

$$y_0(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

*Observe que o gráfico de* $y_0$ *é a linha reta conectando os pontos* $(a, 0)$ *e* $(b, 1)$.

## 2 Variação à Gâteaux

**Definição 2.1.** *Seja* $V$ *um espaço de Banach, seja* $J : D \subset V \to \mathbb{R}$ *um funcional e sejam* $y \in D$ *e* $v \in V_a$

*Definimos a variação à Gâteaux de* $J$ *em* $y$ *na direção* $v$, *denotado por* $\delta J(y; v)$, *como*

$$\delta J(y; v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(y + \varepsilon v) - J(y)}{\varepsilon}.$$

*Equivalentemente,*

$$\delta J(y; v) = \frac{\partial J(y + \varepsilon v)}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}.$$

**Exemplo 2.2.** *Seja* $V = C^1([a, b])$ *e* $J : V \to \mathbb{R}$ *onde*

$$F(y) = \int_a^b ( \text{ sen}^3 x + y(x)^2) \, dx.$$

*Sejam* $y, v \in V$. *Vamos calcular*

$$\delta J(y; v).$$

*Observe que,*

$$
\begin{aligned}
\delta J(y;v) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(y+\varepsilon v)-J(y)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_a^b (\ sen^3 x + (y(x)+\varepsilon v(x))^2)\ dx - \int_a^b (\ sen^3 x + y(x)^2)\ dx}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_a^b (2\varepsilon y(x)v(x) + \varepsilon^2 v(x))\ dx}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left( \int_a^b 2y(x)v(x)\ dx + \varepsilon \int_a^b v(x)^2\ dx \right) \\
&= \int_a^b 2y(x)v(x)\ dx. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

**Exemplo 2.3.** *Seja $V = C^1([a,b])$ e seja $J : V \to \mathbb{R}$ onde*

$$J(y) = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\ dx,$$

*onde $\rho : [a,b] \to (0,+\infty)$ é uma função contínua fixa.*

*Sejam $y, v \in V$.*

*Assim,*

$$\delta J(y;v) = \frac{\partial J(y+\varepsilon v)}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}, \qquad (14)$$

*onde*

$$J(y+\varepsilon v) = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1+(y'(x)+\varepsilon v'(x))^2}\ dx.$$

*Logo,*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J(y+\varepsilon v)}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left( \int_a^b \rho(x)\sqrt{1+(y'(x)+\varepsilon v'(x))^2}\ dx \right) \\
&=^{(*)} \int_a^b \rho(x) \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left( \sqrt{1+(y'(x)+\varepsilon v'(x))^2} \right)\ dx \\
&= \int_a^b \frac{\rho(x)}{2} \frac{2(y'(x)+\varepsilon v'(x))v'(x)}{\sqrt{1+(y'(x)+\varepsilon v'(x))^2}}\ dx. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

*(*): A validade dessa passagem será provada futuramente.*

*Disto obtemos,*

$$\begin{aligned}\delta J(y;v) &= \frac{\partial J(y+\varepsilon v)}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b \frac{\rho(x)y'(x)v'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\,dx. \qquad (16)\end{aligned}$$

*O exemplo está completo.*

**Exemplo 2.4.** *Seja $V = C^1([a,b])$ e $f \in C^1([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Assim $f$ é uma função de 3 variáveis, a saber, $f(x,y,z)$.*

*Considere o funcional $F : V \to \mathbb{R}$, definido por*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx.$$

*Sejam $y, v \in V$. Logo,*

$$\delta F(y;v) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(y+\varepsilon v)|_{\varepsilon=0}.$$

*Observe que*

$$F(y+\varepsilon v) = \int_a^b f(x, y(x)+\varepsilon v(x), y'(x)+\varepsilon v'(x))\,dx,$$

*e portanto*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}F(y+\varepsilon v) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\int_a^b f(x, y(x)+\varepsilon v(x), y'(x)+\varepsilon v'(x))\,dx\right) \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(f(x, y(x)+\varepsilon v(x), y'(x)+\varepsilon v'(x))\right)\,dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f(x, y(x)+\varepsilon v(x), y'(x)+\varepsilon v'(x))}{\partial y}v(x)\right. \\ &\quad \left.+\frac{\partial f(x, y(x)+\varepsilon v(x), y'(x)+\varepsilon v'(x))}{\partial z}v'(x)\right)\,dx. \qquad (17)\end{aligned}$$

*Assim*

$$\begin{aligned}\delta F(y;v) &= \frac{\partial F(y+\varepsilon v)}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f(x,y(x),y'(x))}{\partial y}v(x) + \frac{\partial f(x,y(x),y'(x))}{\partial z}v'(x)\right)\,dx. \qquad (18)\end{aligned}$$

# 3 Minimização de funcionais convexos

**Definição 3.1** (Função Convexa)**.** *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita ser convexa quando*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in [0,1].$$

**Proposição 3.2.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa e diferenciável.*

*Sob tais hipóteses,*

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x\rangle_{\mathbb{R}^n},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

*onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$, isto é,*

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

$\forall x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

***Prova***. Escolha $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Da hipótese,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),\ \forall \lambda \in (0, 1).$$

Logo,

$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x),\ \forall \lambda \in (0, 1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle f'(x), y - x\rangle_{\mathbb{R}^n} &= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \\ &\leq f(y) - f(x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{19}$$

A prova está completa. □

**Proposição 3.3.** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no $\mathbb{R}^n$.*

*Assuma que*

$$f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y - x\rangle_{\mathbb{R}^n},\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

*Sob tais hipóteses, $f$ é convexa.*

***Prova***. Defina $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^*\rangle_{\mathbb{R}^n} - f(x)\}.$$

Tal função é chamada de o conjugado de Fenchel de $f$.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Da hipótese,

$$\langle f'(x), x\rangle_{\mathbb{R}^n} - f(x) \geq \langle f'(x), y\rangle_{\mathbb{R}^n} - f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja

$$\begin{aligned} f^*(f'(x)) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\langle f'(x), y\rangle_{\mathbb{R}^n} - f(y)\} \\ &= \langle f'(x), x\rangle_{\mathbb{R}^n} - f(x). \end{aligned} \tag{20}$$

Por outro lado

$$f^*(x^*) \geq \langle x, x^*\rangle_{\mathbb{R}^n} - f(x),\ \forall x, x^* \in \mathbb{R}^n,$$

e assim

$$f(x) \geq \langle x, x^* \rangle_{\mathbb{R}^n} - f^*(x^*), \ \forall x^* \in \mathbb{R}^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle_{\mathbb{R}^n} - f^*(x^*)\} \\ &\geq \langle f'(x), x \rangle_{\mathbb{R}^n} - f^*(f'(x)). \end{aligned} \tag{21}$$

Disto e de (20), obtemos,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle_{\mathbb{R}^n} - f^*(x^*)\} \\ &= \langle f'(x), x \rangle_{\mathbb{R}^n} - f^*(f'(x)). \end{aligned} \tag{22}$$

Resumindo,

$$f(x) = \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle_{\mathbb{R}^n} - f^*(x^*)\}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Escolha $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Da última equação podemos escrever,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle \lambda x + (1-\lambda)y, x^* \rangle_{\mathbb{R}^n} - f^*(x^*)\} \\ &= \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle \lambda x + (1-\lambda)y, x^* \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &\quad -\lambda f^*(x^*) - (1-\lambda) f^*(x^*)\} \\ &= \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\lambda(\langle x, x^* \rangle_{\mathbb{R}^n} - f^*(x^*)) \\ &\quad +(1-\lambda)(\langle y, x^* \rangle_{\mathbb{R}^n} - f^*(x^*))\} \\ &\leq \lambda \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, x^* \rangle_{\mathbb{R}^n} - f^*(x^*)\} \\ &\quad +(1-\lambda) \sup_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x^* \rangle_{\mathbb{R}^n} - f^*(x^*)\} \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned} \tag{23}$$

Sendo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0, 1]$ arbitrários, conclui-se que $f$ é convexa.

A prova está completa. $\square$

**Definição 3.4** (Funcional convexo)**.** *Seja $V$ um espaço de Banach e seja $J : D \subset V \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que $J$ é convexo quando*

$$J(y + v) - J(y) \geq \delta J(y; v), \ \forall v \in V_a(y),$$

*onde*

$$V_a(y) = \{v \in V \ : \ y + v \in D\}.$$

**Teorema 3.5.** *Seja $V$ um espaço de Banach e seja $J : D \subset U$ um funcional convexo. Assim se $y_0 \in D$ é tal que*

$$\delta J(y_0; v) = 0, \ \forall v \in V_a(y_0),$$

*então*

$$J(y_0) \leq J(y), \ \forall y \in D,$$

*isto é, $y_0$ minimiza $J$ em $D$.*

***Prova.*** Escolha $y \in D$. Seja $v = y - y_0$. Logo $y = y_0 + v \in D$ de modo que

$$v \in V_a(y_0).$$

Da hipótese,

$$\delta J(y_0; v) = 0,$$

e sendo $J$ convexo, obtemos

$$J(y) - J(y_0) = J(y_0 + v) - J(y_0) \geq \delta J(y_0; v) = 0,$$

ou seja,

$$J(y_0) \leq J(y), \ \forall y \in D.$$

A prova está completa. $\square$

**Exemplo 3.6.** *Vejamos um exemplo de funcional convexo.*

*Seja $V = C^1([a,b])$ e $J : D \subset V \to \mathbb{R}$ definido por*

$$J(y) = \int_a^b (y'(x))^2 \, dx,$$

*onde*

$$D = \{y \in V \ : \ y(a) = 1 \ \text{e} \ y(b) = 5\}.$$

*Mostraremos que $J$ é convexo.*

*De fato, sejam $y \in D$ e $v \in V_a$ onde*

$$V_a = \{v \in V \ : \ v(a) = v(b) = 0\}.$$

*Logo,*

$$\begin{aligned} J(y+v) - J(y) &= \int_a^b (y'(x) + v'(x))^2 \, dx - \int_a^b y'(x)^2 \, dx \\ &= \int_a^b 2y'(x)v'(x) \, dx + \int_a^b v'(x)^2 \, dx \\ &\geq \int_a^b 2y'(x)v'(x) \, dx \\ &= \delta J(y; v). \end{aligned} \tag{24}$$

*Portanto, $J$ é convexo.*

## 3.1 Condições suficientes de otimalidade no caso convexo

Começaremos essa sub-seção com uma observação.

**Observação 3.7.** *Consideremos agora uma função* $f : [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *onde* $f \in C^1([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

*Assim, para* $V = C^1([a,b])$, *defina* $F : V \to \mathbb{R}$ *por*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

*Sejam* $y, v \in V$. *Já mostramos que*

$$\delta F(y; v) = \int_a^b (f_y(x, y(x), y'(x))v(x) + f_z(x, y(x), y'(x))v'(x))\, dx.$$

*Suponha que* $f$ *seja convexa em* $(y,z)$ *para todo* $x \in [a,b]$, *o que denotaremos por* $f(\underline{x}, y, z)$ *ser convexa.*

*Da última seção, temos que*

$$\begin{aligned} f(x, y+v, y'+v') - f(x, y, y') &\geq \langle \underline{\nabla} f(x,y,y'), (v, v')\rangle_{\mathbb{R}^2} \\ &= f_y(x,y,y')v + f_z(x,y,y')v',\ \forall x \in [a,b] \end{aligned} \tag{25}$$

*onde denotamos*

$$\underline{\nabla} f(x,y,y') = (f_y(x,y,y'), f_z(x,y,y')).$$

*Portanto,*

$$\begin{aligned} F(y+v) - F(y) &= \int_a^b [f(x, y+v, y'+v') - f(x,y,y')]\, dx \\ &\geq \int_a^b [f_y(x,y,y')v + f_z(x,y,y')v']\, dx \\ &= \delta J(y; v). \end{aligned} \tag{26}$$

*Logo,* $F$ *é convexo.*

**Teorema 3.8.** *Seja* $V = C^1([a,b])$. *Seja* $f \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *onde* $f(\underline{x}, y, z)$ *é convexa. Defina*

$$D = \{y \in V\ :\ y(a) = a_1 \text{ e } y(b) = b_1\},$$

*onde* $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.

*Defina também* $F : D \to \mathbb{R}$ *por*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

*Sob tais hipóteses,* $F$ *é convexo e se* $y_0 \in D$ *é tal que*

$$\frac{d}{dx}[f_z(x, y_0(x), y_0'(x))] = f_y(x, y_0(x), y_0'(x)),\ \forall x \in [a,b],$$

*então* $y_0$ *minimiza* $F$ *em* $D$, *isto é,*

$$F(y_0) \leq F(y),\ \forall y \in D.$$

***Prova***. Que $F$ é convexo resulta da última observação. Suponha agora que $y_0 \in D$ é tal que

$$\frac{d}{dx}[f_z(x, y_0(x), y_0'(x))] = f_y(x, y_0(x), y_0'(x)),\ \forall x \in [a, b].$$

Seja $v \in V_a = \{v \in V\ :\ v(a) = v(b) = 0\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\delta F(y_0; v) &= \int_a^b (f_y(x, y_0(x), y_0'(x))v(x) + f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v'(x))\ dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{d}{dx}(f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v(x)) + f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v'(x)\right)\ dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{d}{dx}[f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v(x)]\right)\ dx \\
&= [f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v(x)]_a^b \\
&= f_z(b, y_0(b), y_0'(b))v(b) - f_z(a, y_0(a), y_0'(a))v(a) \\
&= 0,\ \forall v \in V_a.
\end{aligned} \tag{27}$$

Sendo $F$ convexo, disto e do Teorema 3.5, conclui-se que $y_0$ minimiza $J$ em $D$. $\square$

**Exemplo 3.9.** *Seja* $V = C^1([a, b])$ *e*

$$D = \{y \in V\ :\ y(0) = 0 \text{ e } y(1) = 1\}.$$

*Defina* $F : D \to \mathbb{R}$ *por*

$$F(y) = \int_0^1 [y'(x)^2 + 5y(x)]\ dx,\ \forall y \in D.$$

*Observe que*

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y, y')\ dx$$

*onde*

$$f(x, y, z) = z^2 + 5y,$$

*isto é* $f(\underline{x}, y, z)$ *é convexa.*

*Assim, do último teorema* $F$ *é convexo e se* $y_0 \in D$ *é tal que*

$$\frac{d}{dx}f_z(x, y_0(x), y_0'(x)) = f_y(x, y_0(x), y_0'(x)),\ \forall x \in [a, b],$$

*então* $y_0$ *minimiza* $F$ *em* $D$.

*Considerando que* $f_z(x, y, z) = 2z$ *e* $f_y(x, y, z) = 5$ *da última equação deve-se ter*

$$\frac{d}{dx}(2y_0'(x)) = 5,$$

*ou seja*

$$y_0''(x) = \frac{5}{2}, \ \forall x \in [0,1].$$

*Logo,*

$$y_0'(x) = \frac{5}{2}x + c,$$

*e*

$$y_0(x) = \frac{5}{4}x^2 + cx + d.$$

*Disto e de* $y_0(0) = 0$, *obtemos* $d = 0$.

*E disto e de* $y_0(1) = 1$, *obtemos,*

$$\frac{5}{4} + c = 1,$$

*de modo que*

$$c = -1/4$$

*Portanto*

$$y_0(x) = \frac{5x^2}{4} - \frac{x}{4}$$

*minimiza* $F$ *em* $D$

*O exemplo está completo.*

# 4 Condições naturais, problemas com extremos livres

Começamos esta seção com o seguinte teorema.

**Teorema 4.1.** *Seja* $V = C^1([a,b])$. *Seja* $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *onde* $f(\underline{x}, y, z)$ *é convexa. Defina*

$$D = \{y \in V \ : \ y(a) = a_1\},$$

*onde* $a_1 \in \mathbb{R}$.

*Defina também* $F : D \to \mathbb{R}$ *por*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) \, dx.$$

*Sob tais hipóteses,* $F$ *é convexo e se* $y_0 \in D$ *é tal que*

$$\frac{d}{dx}[f_z(x, y_0(x), y_0'(x))] = f_y(x, y_0(x), y_0'(x)), \ \forall x \in [a,b]$$

*e*

$$f_z(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0$$

*então* $y_0$ *minimiza* $F$ *em* $D$, *isto é,*

$$F(y_0) \leq F(y), \ \forall y \in D.$$

***Prova***. Que $F$ é convexo resulta da última observação. Suponha agora que $y_0 \in D$ é tal que

$$\frac{d}{dx}[f_z(x, y_0(x), y_0'(x))] = f_y(x, y_0(x), y_0'(x)),\ \forall x \in [a, b]$$

e

$$f_z(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0.$$

Seja $v \in V_a = \{v \in V\ :\ v(a) = 0\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\delta F(y_0; v) &= \int_a^b (f_y(x, y_0(x), y_0'(x))v(x) + f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v'(x))\ dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{d}{dx}(f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v(x)) + f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v'(x)\right)\ dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{d}{dx}[f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v(x)]\right)\ dx \\
&= [f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v(x)]_a^b \\
&= f_z(b, y_0(b), y_0'(b))v(b) - f_z(a, y_0(a), y_0'(a))v(a) \\
&= 0v(b) - f_z(a, y_0(a), y_0'(b))0 \\
&= 0,\ \forall v \in V_a. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Sendo $F$ convexo, disto e do Teorema 3.5, conclui-se que $y_0$ minimiza $J$ em $D$. $\square$

**Observação 4.2.** *Sobre o último teorema, a condição $y(a) = a_1$ é dita ser uma condição de contorno essencial. Por outro lado, a condição $f_z(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0$ é dita ser uma condição de contorno natural.*

**Teorema 4.3.** *Seja $V = C^1([a, b])$. Seja $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ onde $f(\underline{x}, y, z)$ é convexa. Defina*

$$D = V$$

*e $F : D \to \mathbb{R}$ por*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\ dx.$$

*Sob tais hipóteses, $F$ é convexo e se $y_0 \in D$ é tal que*

$$\frac{d}{dx}[f_z(x, y_0(x), y_0'(x))] = f_y(x, y_0(x), y_0'(x)),\ \forall x \in [a, b],$$

$$f_z(a, y_0(a), y_0'(a)) = 0$$

*e*

$$f_z(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0,$$

*então $y_0$ minimiza $F$ em $D$, isto é,*

$$F(y_0) \leq F(y),\ \forall y \in D.$$

***Prova***. Que $F$ é convexo resulta do exposto no início da última seção. Suponha agora que $y_0 \in D$ é tal que

$$\frac{d}{dx}[f_z(x, y_0(x), y_0'(x))] = f_y(x, y_0(x), y_0'(x)), \ \forall x \in [a, b]$$

e

$$f_z(a, y_0(a), y_0'(a)) = f_z(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0.$$

Seja $v \in D = V$ Assim,

$$\begin{aligned}
\delta F(y_0; v) &= \int_a^b (f_y(x, y_0(x), y_0'(x))v(x) + f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v'(x)) \, dx \\
&= \int_a^b \left( \frac{d}{dx}(f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v(x)) + f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v'(x) \right) \, dx \\
&= \int_a^b \left( \frac{d}{dx}[f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v(x)] \right) \, dx \\
&= [f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v(x)]_a^b \\
&= f_z(b, y_0(b), y_0'(b))v(b) - f_z(a, y_0(a), y_0'(a))v(a) \\
&= 0v(b) - 0v(a) \\
&= 0, \ \forall v \in D. \qquad (29)
\end{aligned}$$

Sendo $F$ convexo, disto e do Teorema 3.5, conclui-se que $y_0$ minimiza $J$ em $D = V$. □

**Observação 4.4.** *Sobre o último teorema, as condições* $f_z(a, y_0(a), y_0'(a)) = f_z(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0$ *são ditas condições de contorno naturais para o problema com extremos livres.*

**Exercício 4.5.** *Mostre que* $F$ *é convexo e obtenha o seu ponto de mínimo em* $D, D_1$ *e* $D_2$*, onde*

$$F(y) = \int_1^2 \frac{y'(x)^2}{x} \, dx,$$

*e onde*

1. $$D = \{y \in C^1([1, 2]) \ : \ y(1) = 0, \ y(1) = 3\},$$

2. $$D_1 = \{y \in C^1([1, 2]) \ : \ y(2) = 3\}.$$

3. $$D_2 = C^1([1, 2]).$$

*Solução: Observe que*

$$F(y) = \int_1^2 f(x, y(x), y'(x)) \, dx,$$

*onde* $f(x, y, z) = z^2/x$*, de modo que* $f(\underline{x}, y, z)$ *é convexa.*

*Potanto, $F$ é convexo.*

*Sejam $y, v \in V$, assim,*

$$\delta F(y;v) = \int_1^2 [f_y(x,y,y')v + f_z(x,y,y')v']\,dx,$$

*onde*

$$f_y(x,y,z) = 0$$

*e*

$$f_z(x,y,z) = 2z/x.$$

*Portanto,*

$$\delta F(y;v) = \int_1^2 2x^{-1}y'(x)v'(x)\,dx.$$

*Para $D$, do Teorema 6.1, condições suficientes de otimalidade são dadas por,*

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[f_z(x,y_0(x),y_0'(x))] = f_y(x,y_0(x),y_0'(x)) \text{ em } [1,2], \\ y_0(1) = 0, \\ y_0(2) = 3. \end{cases} \tag{30}$$

*Asim, deve-se ter*

$$\frac{d}{dx}[2x^{-1}y_0'(x)] = 0,$$

*ou seja*

$$2x^{-1}y_0'(x) = c,$$

*isto é*

$$y_0'(x) = \frac{cx}{2},$$

*e portanto,*

$$y_0(x) = \frac{cx^2}{4} + d.$$

*Por outro lado, deve-se também ter*

$$y_0(1) = \frac{c}{4} + d = 0,$$

*e*

$$y_0(2) = c + d = 3.$$

*Logo, $c = 4$ e $d = -1$ de modo que $y_0(x) = x^2 - 1$ minimiza $F$ em $D$.*

*Para $D_1$, do Teorema 4.1, condições suficientes de otimalidade são dadas por,*

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[f_z(x,y_0(x),y_0'(x))] = f_y(x,y_0(x),y_0'(x)) \text{ em } [1,2], \\ y_0(2) = 3, \\ f_z(1,y_0(1),y_0'(1)) = 0. \end{cases} \tag{31}$$

*Assim, deve-se ter*

$$y_0(x) = \frac{cx^2}{4} + d.$$

*Por outro lado, deve-se também ter*

$$y_0(2) = c + d = 3,$$

*e*

$$f_z(1, y_0(1), y_0'(1)) = 2(1)^{-1} y_0'(1) = 0,$$

*isto é*

$$y_0'(1) = c/2 = 0,$$

*e assim* $c = 0$ *e* $d = 3$ *de modo que* $y_0(x) = 3$ *minimiza* $F$ *em* $D_1$.

*Para* $D_2$*, do Teorema 4.3, condições suficientes de otimalidade são dadas por,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx}[f_z(x, y_0(x), y_0'(x))] = f_y(x, y_0(x), y_0'(x)) \text{ em } [1,2], \\ f_z(1, y_0(1), y_0'(1)) = 0 \\ f_z(2, y_0(2), y_0'(2)) = 0. \end{array} \right. \tag{32}$$

*Assim, deve-se ter*

$$y_0(x) = \frac{cx^2}{4} + d.$$

*Por outro lado, deve-se também ter*

$$f_z(1, y_0(1), y_0'(1)) = 2(1)^{-1} y_0'(1) = 0,$$

$$f_z(2, y_0(2), y_0'(2)) = 2(2)^{-1} y_0'(2) = 0,$$

*isto é*

$$y_0'(1) = y_0'(2) = 0,$$

*onde* $y_0'(x) = cx/2$.

*Logo* $c = 0$*, de modo que* $y_0(x) = d$, $\forall d \in \mathbb{R}$ *minimiza* $F$ *em* $D_2$.

**Exercício 4.6.** *Sejam* $V = C^2([0,1])$ *e* $J : D \subset V \to \mathbb{R}$ *onde*

$$J(y) = \frac{EI}{2} \int_0^1 y''(x)^2 \, dx - \int_0^1 P(x) y(x) \, dx,$$

*representa a energia de uma viga reta de seção transversal retangular com momento de inércia* $I$*. Aqui* $y(x)$ *denota o deslocamento vertical no ponto* $x \in [0,1]$ *devido à ação da distribuição vertical de cargas* $P(x) = \alpha x$, $\forall x \in [0,1]$*, onde* $E > 0$ *é o módulo de Young e* $\alpha > 0$ *é uma contante real.*

*E também*

$$D = \{y \in V \; : \; y(0) = y(1) = 0\}.$$

*Sob tais hipóteses,*

1. *prove que* $F$ *é convexo.*

2. *Prove que se* $y_0 \in D$ *é tal que*

$$\begin{cases} EI\frac{d^4}{dx^4}[y_0(x)] = P(x), \ \forall x \in [0,1], \\ \\ y_0''(0) = 0, \\ \\ y_0''(1) = 0, \end{cases} \tag{33}$$

*então* $y_0$ *minimiza* $F$ *em* $D$.

3. *Obtenha a solução ótima* $y_0 \in D$.

*Solução:*

*Sejam* $y \in D$ *e* $v \in V_a = \{v \in V \ : \ v(0) = v(1) = 0\}$.
*Relambramos que*

$$\begin{aligned} \delta J(y;v) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(y+\varepsilon v) - F(y)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(EI/2)\int_0^1 [(y'' + \varepsilon v'')^2 - (y'')^2]\,dx - \int_0^1 (P(y+\varepsilon v) - P)\,dx}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_0^1 (EIy''v'' - Pv)\,dx + \frac{\varepsilon EI}{2} \int_0^1 (v'')^2\,dx \right) \\ &= \int_0^1 (EIy''v'' - Pv)\,dx. \end{aligned} \tag{34}$$

*Por outro lado,*

$$\begin{aligned} J(y+v) - J(v) &= (EI/2)\int_0^1 [(y''+v'')^2 - (y'')^2]\,dx - \int_0^1 (P(y+v) - P)\,dx \\ &= \int_0^1 (EIy''v'' - Pv)\,dx + \frac{EI}{2}\int_0^1 (v'')^2\,dx \\ &\geq \int_0^1 (EIy''v'' - Pv)\,dx \\ &= \delta J(y;v). \end{aligned} \tag{35}$$

*Sendo* $y \in D$ *e* $v \in V_a$ *arbitrários conclui-se que* $J$ *é convexo.*
*Assuma que* $y_0 \in D$ *é tal que*

$$\begin{cases} EI\frac{d^4}{dx^4}[y_0(x)] = P(x), \ \forall x \in [0,1], \\ \\ y_0''(0) = 0, \\ \\ y_0''(1) = 0, \end{cases} \tag{36}$$

*Logo,*

$$\begin{aligned}
\delta J(y;v) &= \int_0^1 (EIy''v'' - Pv)\,dx \\
&= \int_0^1 (EIy''v'' - EIy^{(4)}v)\,dx \\
&= \int_0^1 (EIy''v'' + EIy^{'''}v')\,dx - [EIy'''(x)v(x)]_a^b \\
&= \int_0^1 (EIy''v'' + EIy^{'''}v')\,dx \\
&= \int_0^1 (EIy''v'' - EIy^{''}v'')\,dx + [EIy''(x)v'(x)]_a^b \\
&= 0
\end{aligned} \tag{37}$$

*Resumindo*

$$\delta J(y_0;v) = 0,\ \forall v \in V_a$$

*portanto, sendo $J$ convexo, conclui-se que $y_0$ minimiza $J$ em $D$.*

*Para obter a solução da EDO em questão, denotaremos,*

$$y_0(x) = y_p(x) + y_h(x),$$

*onde uma solução particular $y_p$ e dada por $y_p(x) = \frac{\alpha x^5}{120EI}$, onde claramente*

$$EI\frac{d^4}{dx^4}[y_p(x)] = P(x), \forall x \in [0,1].$$

*A equação homogênea associada*

$$EI\frac{d^4}{dx^4}[y_h(x)] = 0,$$

*tem a seguinte solução geral*

$$y_h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

*e assim,*

$$y_0(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{\alpha x^5}{120EI} + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

*De $y_0(0) = 0$, obtemos $d = 0$.*

*Observe que $y_0'(x) = \frac{5\alpha}{120EI}x^4 + 3ax^2 + 2bx + c$ e $y_0''(x) = \frac{\alpha}{6EI}x^3 + 6ax + 2b$.*

*Disto e de $y_0''(0) = 0$, obtemos $b = 0$.*

*De $y_0''(1) = 0$, obtemos,*

$$\frac{\alpha}{6EI}1^3 + 6a\ 1 = 0,$$

*e assim*

$$a = -\frac{\alpha}{36EI}.$$

*De tais resultados e de $y_0(1) = 0$, obtemos,*

$$\frac{\alpha}{120EI} + a\,1^3 + c\,1 = \frac{\alpha}{120EI} - \frac{\alpha}{36EI} + c = 0,$$

*ou seja,*

$$c = \frac{\alpha}{EI}\left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120}\right) = \frac{7\alpha}{360EI}.$$

*Finalmente, obtivemos então que*

$$y_0(x) = \frac{\alpha x^5}{120EI} - \frac{\alpha x^3}{36EI} + \frac{7\alpha x}{360EI}$$

*minimiza $J$ em $D$.*

*A solução está completa.*

# 5 O lema de du Bois-Reymond

**Lema 5.1** (du Bois-Reymond)**.** *Suponha que $h \in C([a,b])$ e*

$$\int_a^b h(x)v'(x)\,dx = 0,\ \forall v \in V_a,$$

*onde*

$$V_a = \{v \in C^1([a,b])\ :\ v(a) = v(b) = 0\}.$$

*Sob tais hipóteses, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$h(x) = c,\ \forall x \in [a,b].$$

***Prova***. Seja

$$c = \frac{\int_a^b h(t)\,dt}{b-a}.$$

Defina

$$v(x) = \int_a^x (h(t) - c)\,dt.$$

Assim

$$v'(x) = h(x) - c,\ \forall x \in [a,b],$$

de modo que $v \in C^1([a,b])$.

Além disso,

$$v(a) = \int_a^a (h(t) - c)\,dt = 0,$$

e

$$v(b) = \int_a^b (h(t) - c)\, dt = \int_a^b h(t)\, dt - c(b-a) = c(b-a) - c(b-a) = 0,$$

e portanto $v \in V_a$.

Observe que, disto e da hipótese,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (h(t)-c)^2\, dt \\ &= \int_a^b (h(t)-c)(h(t)-c)\, dt \\ &= \int_a^b (h(t)-c)v'(t)\, dt \\ &= \int_a^b h(t)v'(t)\, dt - c\int_a^b v'(t)\, dt \\ &= 0 - c(v(b) - v(a)) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Assim,

$$\int_a^b (h(t)-c)^2\, dt = 0.$$

Sendo $h$ contínua, conclui-se que

$$h(x) - c = 0, \ \forall x \in [a,b],$$

isto é

$$h(x) = c, \ \forall x \in [a,b].$$

A prova está completa. $\square$

**Teorema 5.2.** *Sejam $g, h \in C([a,b])$ e suponha que*

$$\int_a^b (g(x)v(x) + h(x)v'(x))\, dx = 0, \ \forall v \in V_a,$$

*onde*

$$V_a = \{v \in C^1([a,b]) \ : \ v(a) = v(b) = 0\}.$$

*Sob tais hipóteses, $h \in C^1([a,b])$ e*

$$h'(x) = g(x), \ \forall x \in [a,b].$$

***Prova***. Defina

$$G(x) = \int_a^x g(t)\ dt.$$

Logo,

$$G'(x) = g(x),\ \forall x \in [a, b].$$

Seja $v \in V_a$.

Das hipóteses,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b [g(x)v(x) + h(x)v'(x)]\ dx \\ &= \int_a^b [-G(x)v'(x) + h(x)v'(x)]\ dx + [G(x)v(x)]_a^b \\ &= \int_a^b [-G(x) + h(x)]v'(x)\ dx,\ \forall v \in V_a. \end{aligned} \tag{39}$$

Disto e do du Bois - Reymond lema, conclui-se que

$$-G(x) + h(x) = c, \forall x \in [a,\ b],$$

para algum $c \in \mathbb{R}$.

Logo

$$g(x) = G'(x) = h'(x),\ \forall x \in [a, b],$$

de modo que

$$g \in C^1([a, b]).$$

A prova está completa.

$\square$

**Lema 5.3** (Lema fundamental do cálculo de variações para uma dimensão)**.** *Seja* $g \in C([a, b]) = V$.

*Assuma que*

$$\int_a^b g(x)v(x)\ dx = 0,\ \forall v \in V_a,$$

*onde novamente,*

$$V_a = \{v \in C^1([a, b])\ :\ v(a) = v(b) = 0\}.$$

*Sob tais hípóteses,*

$$g(x) = 0,\ \forall x \in [a, b].$$

***Prova***. Basta aplicar o último theorema com $h \equiv 0$. $\square$

**Exercício 5.4.** *Seja* $h \in C([a, b])$.

*Suponha que*

$$\int_a^b h(x)w(x)\ dx = 0,\ \forall w \in D_0,$$

*onde*

$$D_0 = \left\{ w \in C([a,b]) \ : \ \int_a^b w(x)\,dx = 0 \right\}.$$

*Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$h(x) = c, \ \forall x \in [a,b].$$

*Solução: Defina, conforme acima,*

$$V_a = \{v \in C^1([a,b]) \ : \ v(a) = v(b) = 0\}.$$

*Seja $v \in V_a$.*
*Seja $w \in C([a,b])$ tal que*

$$w(x) = v'(x), \ \forall x \in [a,b].$$

*Observe que*

$$\int_a^b w(x)\,dx = \int_a^b v'(x)\,dx = [v(x)]_a^b = v(b) - v(a) = 0.$$

*Da hipótese $\int_a^b h(x)w(x)\,dx = 0$, e assim*

$$\int_a^b h(x)v'(x)\,dx = 0.$$

*Sendo $v \in V_a$ arbitrário, disto e do lema de du Bois-Reymond, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$h(x) = c, \ \forall x \in [a,b].$$

*A solução está completa.*

# 6 Cálculo de variações, o caso de funções escalares no $\mathbb{R}^n$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado, conexo e com uma fronteira $\partial\Omega = S$ regular (Lipschitziana) (o que definiremos como $\Omega$ ser de classe $\hat{C}^1$). Seja $V = C^1(\overline{\Omega})$ e seja $F : D \subset V \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(y) = \int_\Omega f(x, y(x), \nabla y(x))\,dx, \ \forall y \in V,$$

onde denotamos

$$dx = dx_1 \cdots dx_n.$$

Assuma que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe $C^2$. Suponha também que $f(x, y, \mathbf{z})$ é convexa em $(y, \mathbf{z})$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, o que denotaremos por $f(\underline{x}, y, \mathbf{z})$ ser convexa.

Observe que para $y \in D$ e $v \in V_a$, onde

$$D = \{y \in V \ : \ y = y_1 \text{ em } \partial\Omega\},$$

e

$$V_a = \{v \in V \ : \ v = 0 \text{ em } \partial\Omega\},$$

onde

$$y_1 \in C^1(\overline{\Omega}),$$

temos que

$$\delta F(y;v) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(y+\varepsilon v)|_{\varepsilon=0},$$

onde

$$F(y+\varepsilon v) = \int_\Omega f(x, y+\varepsilon v, \nabla y + \varepsilon \nabla v)\, dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(y+\varepsilon v) &= \int_\Omega \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (f(x, y+\varepsilon v, \nabla y + \varepsilon \nabla v) \right) dx \\ &= \int_\Omega [f_y(x, y+\varepsilon v, \nabla y + \varepsilon \nabla v) v + \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x, y+\varepsilon v, \nabla y + \varepsilon \nabla v) v_{x_i}]\, dx. \end{aligned} \tag{40}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta F(y;v) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(y+\varepsilon v)|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_\Omega [f_y(x,y,\nabla y) v + \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x,y,\nabla y) v_{x_i}]\, dx. \end{aligned} \tag{41}$$

Por outro lado, sendo $f(\underline{x}, y, \mathbf{z})$ convexa, temos que

$$\begin{aligned} F(y+v) - F(y) &= \int_\Omega [f(x, y+v, \nabla y + \nabla v) - f(x,y,\nabla y)]\, dx \\ &\geq \langle \underline{\nabla} f(x,y,\nabla y), (v, \nabla v) \rangle_{R^{n+1}} \\ &= \int_\Omega [f_y(x,y,\nabla y) v + \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x,y,\nabla y) v_{x_i}]\, dx \\ &= \delta F(y;v). \end{aligned} \tag{42}$$

Sendo $y \in D$ e $v \in V_a$ arbitrários, podemos concluir que $F$ é convexo.

Aqui denotamos,

$$\underline{\nabla} f(x,y,\nabla y) = (f_y(x,y,\nabla y), f_{z_1}(x,y,\nabla y), \cdots, f_{z_n}(x,y,\nabla y)).$$

**Teorema 6.1.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de classe $\hat{C}^1$ e $V = C^1(\overline{\Omega})$. Seja $f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ onde $f(\underline{x}, y, \mathbf{z})$ é convexa. Defina*

$$D = \{y \in V \ : \ y = y_1 \text{ em } \partial\Omega\},$$

*onde* $y_1 \in C^1(\overline{\Omega})$

*Defina também* $F : D \to \mathbb{R}$ *por*

$$F(y) = \int_\Omega f(x, y(x), \nabla y(x))\, dx.$$

*Sob tais hipóteses,* $F$ *é convexo e se* $y_0 \in D$ *é tal que*

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}[f_{z_i}(x, y_0(x), \nabla y_0(x))] = f_y(x, y_0(x), \nabla y_0(x)),\ \forall x \in \overline{\Omega},$$

*então* $y_0$ *minimiza* $F$ *em* $D$*, isto é,*

$$F(y_0) \leq F(y),\ \forall y \in D.$$

***Prova***. Que $F$ é convexo resulta da última observação. Suponha agora que $y_0 \in D$ é tal que

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}[f_{z_i}(x, y_0(x), \nabla y_0(x))] = f_y(x, y_0(x), \nabla y_0(x)),\ \forall x \in \overline{\Omega},$$

Seja $v \in V_a = \{v \in V\ :\ v = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\delta F(y_0; v) &= \int_\Omega (f_y(x, y_0(x), \nabla y_0(x))v(x) + \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x, y_0(x), \nabla y_0(x))v_{x_i}(x))\, dx \\
&= \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}(f_{z_i}(x, y_0(x), \nabla y_0(x)))v(x) + \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x, y_0(x), \nabla y_0(x))v_{x_i}(x) \right)\, dx \\
&= \int_\Omega \left( -\sum_{i=1}^n f_{z_i}(x, y_0(x), \nabla y_0(x))v_{x_i}(x) + \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x, y_0(x), \nabla y_0(x))v_{x_i}(x) \right)\, dx \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x, y_0(x), \nabla y_0(x))\ n_i\ v(x)\, dS \\
&= 0,\ \forall v \in V_a, \qquad (43)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_n)$ denota o campo normal unitário exterior à $\partial\Omega = S$. Sendo $F$ convexo, disto e do Teorema 3.5, conclui-se que $y_0$ minimiza $F$ em $D$. $\square$

# 7 A segunda variação à Gâteaux

**Definição 7.1.** *Seja* $V$ *um espaço de Banach. Seja* $F : D \subset V \to \mathbb{R}$ *um funcional tal que* $\delta F(y; v)$ *existe em* $B_r(y_0)$*, para algum* $y_0 \in D,\ r > 0$ *e para todo* $v \in V_a$*.*

*Sejam* $y \in B_r(y_0)$ *e* $v, w \in V_a$*. Definimos a segunda variação à Gâteaux de* $F$ *no ponto* $y$ *nas direções* $v$ *e* $w$*, denotada por* $\delta^2 F(y; v, w)$*, como*

$$\delta^2 F(y; v, w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta F(y + \varepsilon w; v) - \delta F(y; v)}{\varepsilon},$$

*quando tal limite existe.*

**Observação 7.2.** *Observe que no contexto da última definição, quando os limites em questão existem, temos que*

$$\delta F(y; v) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(y + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0},$$

*e*

$$\delta^2 F(y; v, v) = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} F(y + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0}, \forall v \in V_a.$$

*Assim, por exemplo, para $V = C^1(\overline{\Omega})$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é de classe $\hat{C}^1$ e $F : V \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$F(y) = \int_\Omega f(x, y, \nabla y)\, dx$$

*e onde*

$$f \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n),$$

*para $y, v \in V$, temos que*

$$\delta^2 F(y; v, v) = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} F(y + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0},$$

*onde*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} F(y + \varepsilon v) &= \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \left( \int_\Omega f(x, y + \varepsilon v, \nabla y + \varepsilon \nabla v)\, dx \right) \\
&= \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} [f(x, y + \varepsilon v, \nabla y + \varepsilon \nabla v)]\, dx \\
&= \int_\Omega \Bigg[ f_{yy}(x, y + \varepsilon v, \nabla y + \varepsilon \nabla v) v^2 + \sum_{i=1}^n 2 f_{yz_i}(x, y + \varepsilon v, \nabla y + \varepsilon \nabla v) v v_{x_i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{z_i z_j}(x, y + \varepsilon v, \nabla y + \varepsilon \nabla v) v_{x_i} v_{x_j} \Bigg]\, dx \qquad (44)
\end{aligned}$$

*de modo que*

$$\begin{aligned}
\delta^2 F(y; v, v) &= \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} F(y + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_\Omega \Bigg[ f_{yy}(x, y, \nabla y) v^2 + \sum_{i=1}^n 2 f_{yz_i}(x, y, \nabla y) v v_{x_i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{z_i z_j}(x, y, \nabla y) v_{x_i} v_{x_j} \Bigg]\, dx. \qquad (45)
\end{aligned}$$

# 8 A condição necessária de primeira ordem para um mínimo local

**Definição 8.1.** *Seja $V$ um espaço de Banach. Seja $F : D \subset V \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que $y_0 \in D$ é um ponto de mínimo local para $F$ em $D$, se existe $\delta > 0$ tal que*

$$F(y) \geq F(y_0),\ \forall y \in B_\delta(y_0) \cap D.$$

**Teorema 8.2** (condição necessária de primeira ordem)**.** *Seja $V$ um espaço de Banach. Seja $F : D \subset V \to \mathbb{R}$ um funcional. Suponha que $y_0 \in D$ é um ponto de mínimo local para $F$ em $D$. Seja $v \in V_a$ e assuma que $\delta F(y_0; v)$ existe.*

*Sob tais hipóteses,*

$$\delta F(y_0; v) = 0.$$

***Prova.*** Defina $\phi(\varepsilon) = F(y_0 + \varepsilon v)$, a qual da hipótese de existência de $\delta F(y_0; v)$, está bem definida para todo $\varepsilon$ suficientemente pequeno.

Também da hipótese, $\varepsilon = 0$ é um ponto de mínimo local para função diferenciável em 0, $\phi$.

Assim da condição usual do cálculo de uma variável, devemos ter

$$\phi'(0) = 0,$$

e portanto,

$$\phi'(0) = \delta F(y_0; v) = 0.$$

A prova está completa. $\square$

**Teorema 8.3** (condição suficiente de segunda ordem)**.** *Seja $V$ um espaço de Banach. Seja $F : D \subset V \to \mathbb{R}$ um funcional. Suponha que $y_0 \in D$ é tal que $\delta F(y_0; v) = 0$ para todo $v \in V_a$ e que existe $\delta > 0$ tal que*

$$\delta^2 F(y; v, v) \geq 0, \ \forall y \in B_\delta(y_0) \text{ e } v \in V_a.$$

*Sob tais hipóteses $y_0 \in D$ é um ponto de mínimo local para $F$, isto é*

$$F(y) \geq F(y_0), \ \forall y \in B_r(y_0) \cap D.$$

***Prova.*** Seja $y \in B_\delta(y_0) \cap D$. Defina $v = y - y_0 \in V_a$.

Defina também $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como

$$\phi(\varepsilon) = F(y_0 + \varepsilon v).$$

Do teorema de Taylor para uma variável, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!}(1 - 0) + \frac{1}{2!}\phi''(t_0)(1 - 0)^2,$$

Isto é,

$$\begin{aligned} F(y) &= F(y_0 + v) \\ &= F(y_0) + \delta F(y_0; v) + \frac{1}{2}\delta^2 F(y_0 + t_0 v; v, v) \\ &= F(y_0) + \frac{1}{2}\delta^2 F(y_0 + t_0 v; v, v) \\ &\geq F(y_0), \ \forall y \in B_\delta(y_0) \cap D. \end{aligned} \tag{46}$$

A prova está completa. $\square$

# 9 Funcionais contínuos

**Definição 9.1.** *Seja $V$ um espaço de Banach. Seja $F : D \subset V \to \mathbb{R}$ um funcional e seja $y_0 \in D$.*

*Dizemos que $F$ é contínuo em $y_0 \in D$, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $y \in D$ e $\|y - y_0\|_V < \delta$, então*

$$|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon.$$

**Exemplo 9.2.** *Seja $V = C^1([a,b])$ e $f \in C([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.*

*Considere $F : V \to \mathbb{R}$ onde*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx,$$

*e*

$$\|y\|_V = \max\{|y(x)| + |y'(x)| \ : \ x \in [a,b]\}.$$

*Seja $y_0 \in V$. Provaremos que $F$ é contínuo em $y_0$.*

*Seja $y \in V$ tal que*

$$\|y - y_0\|_V < 1,$$

*assim*

$$\|y\|_V - \|y_0\|_V \leq \|y - y_0\|_V < 1,$$

*isto é,*

$$\|y\|_V < 1 + \|y_0\|_V \equiv \alpha.$$

*Observe que $f$ é uniformemente contínua no compacto*

$$[a,b] \times [-\alpha, \alpha] \times [-\alpha, \alpha] \equiv A.$$

*Seja $\varepsilon > 0$. Portanto existe $\delta_0 > 0$ tal que se $(x, y_1, z_1)$ e $(x, y_2, z_2) \in A$ e*

$$|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| < \delta_0$$

*então*

$$|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (47)$$

*Seja $\delta = \min\{\delta_0, 1\}$.*

*Assim se*

$$\|y - y_0\|_V < \delta,$$

*teremos*

$$\max\{|y(x) - y_0(x)| + |y'(x) - y_0'(x)| \ : \ x \in [a,b]\} < \delta \leq 1,$$

*e portanto disto e (47), obtemos*

$$|f(x, y(x), y'(x)) - f(x, y_0(x), y_0'(x))| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \ \forall x \in [a,b].$$

*Logo,*

$$\begin{aligned}
|F(y)-F(y_0)| &= \left|\int_a^b [f(x,y(x),y'(x))-f(x,y_0(x),y_0'(x))]\,dx\right| \\
&\leq \int_a^b |f(x,y(x),y'(x))-f(x,y_0(x),y_0'(x))|\,dx \\
&< \frac{\varepsilon(b-a)}{(b-a)} \\
&= \varepsilon. \qquad (48)
\end{aligned}$$

*Podemos concluir então que $F$ é contínuo em $y_0$, $\forall y_0 \in V$.*

*O exemplo está completo.*

# 10 Variação à Gâteaux, a prova da fórmula

Nas seções anteriores utilizamos certa informalidade para calcular a fórmula da variação à Gâteaux de um funcional.

Nessa seção provaremos rigorosamente os resultados anteriormente obtidos.

**Teorema 10.1.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de classe $\hat{C}^1$ e $V = C^1(\overline{\Omega})$.*

*Seja $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$.*

*Defina $F : V \to \mathbb{R}$ por*

$$F(y) = \int_\Omega f(x, y(x), \nabla y(x))\,dx.$$

*Sejam $y, v \in V$. Sob tais hipóteses*

$$\delta F(y;v) = \int_\Omega \left( f_y(x,y(x),\nabla y(x))v(x) + \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x,y(x),\nabla y(x))v_{x_i}(x) \right)\,dx.$$

***Prova***. Seja $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma sequência tal que

$$\varepsilon_n \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Defina

$$G_n(x) = \frac{f(x,y(x)+\varepsilon_n v(x), \nabla y(x) + \varepsilon_n \nabla v(x)) - f(x,y(x),\nabla y(x))}{\varepsilon_n},$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in \overline{\Omega}$.

Defina também

$$G(x) = f_y(x,y(x),\nabla y(x))v(x) + \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x,y(x),\nabla y(x))v_{x_i}(x),\ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Observe que

$$G_n(x) \to G(x), \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Provaremos agora que, para uma subsequência não re-rotulada,

$$\int_\Omega G_n(x)\, dx \to \int_\Omega G(x)\, dx, \text{ quando } n \to \infty$$

Defina

$$c_n = \max_{x \in \overline{\Omega}} \{|G_n(x) - G(x)|\}.$$

Da continuidade das funções em questão, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \overline{\Omega}$ tal que

$$c_n = |G_n(x_n) - G(x_n)|.$$

Observe que $\{x_n\} \subset \overline{\Omega}$ e tal conjunto é compacto. Logo, existem uma subsequência $\{x_{n_j}\}$ de $\{x_n\}$ e $x_0 \in \overline{\Omega}$ tais que

$$\lim_{j \to \infty} x_{n_j} = x_0.$$

Por outro lado, do teorema do valor médio, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $t_j \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
G_n(x_{n_j}) &= \frac{f(x_{n_j}, y(x_{n_j}) + \varepsilon_{n_j} v(x_{n_j}), \nabla y(x_{n_j}) + \varepsilon_{n_j} \nabla v(x_{n_j})) - f(x_{n_j}, y(x_{n_j}), \nabla y(x_{n_j}))}{\varepsilon_{n_j}} \\
&= f_y(x_{n_j}, y(x_{n_j}) + t_j \varepsilon_{n_j} v(x_{n_j}), \nabla y(x_{n_j}) + t_j \varepsilon_{n_j} \nabla v(x_{n_j})) v(x_{n_j}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x_{n_j}, y(x_{n_j}) + t_j \varepsilon_n v(x_{n_j}), \nabla y(x_{n_j}) + t_j \varepsilon_{n_j} \nabla v(x_{n_j})) v_{x_i}(x_{n_j}) \\
&\to G(x_0), \text{ quando } j \to \infty.
\end{aligned} \tag{49}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
c_{n_j} &= |G_{n_j}(x_{n_j}) - G(x_{n_j})| \\
&\to |G(x_0) - G(x_0)| \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{50}$$

Seja $\varepsilon > 0$. Portanto, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j > j_0$ então

$$0 \leq c_{n_j} < \frac{\varepsilon}{m(\Omega)},$$

onde

$$m(\Omega) = \int_\Omega dx.$$

Logo, se $j > j_0$, então

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega [G_{n_j}(x) - G(x)]\, dx\right| &\leq \int_\Omega |G_{n_j}(x) - G(x)|\, dx \\ &\leq \int_\Omega c_{n_j}\, dx \\ &= c_{n_j} m(\Omega) \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{51}$$

Portanto,

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega G_{n_j}(x)\, dx = \int_\Omega G(x)\, dx.$$

Suponha agora, para obter contradição, que não tenhamos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega G_\varepsilon(x)\, dx = \int_\Omega G(x)\, dx,$$

onde

$$G_\varepsilon(x) = \frac{f(x, y(x) + \varepsilon v(x), \nabla y(x) + \varepsilon \nabla v(x)) - f(x, y(x), \nabla y(x))}{\varepsilon},$$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon \neq 0$.

Logo, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\tilde{\varepsilon}_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < |\tilde{\varepsilon}_n| < \frac{1}{n},$$

e

$$\left|\int_\Omega \tilde{G}_n(x)\, dx - \int_\Omega G(x)\, dx\right| \geq \varepsilon_0, \tag{52}$$

onde

$$\tilde{G}_n(x) = \frac{f(x, y(x) + \tilde{\varepsilon}_n v(x), \nabla y(x) + \tilde{\varepsilon}_n \nabla v(x)) - f(x, y(x), \nabla y(x))}{\tilde{\varepsilon}_n},$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in \overline{\Omega}$.

Entretanto, do exposto acima, podemos obter uma subsequência $\{\tilde{\varepsilon}_{n_j}\}$ de $\{\tilde{\varepsilon}_n\}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \tilde{G}_{n_j}(x)\, dx = \int_\Omega G(x)\, dx,$$

o que contradiz (52).

Portanto, necessariamente, temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega G_\varepsilon(x)\, dx = \int_\Omega G(x)\, dx,$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\delta F(y;v) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(y+\varepsilon v)-F(y)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega G_\varepsilon(x)\,dx \\
&= \int_\Omega G(x)\,dx \\
&= \int_\Omega\left(f_y(x,y(x),\nabla y(x))v(x)+\sum_{i=1}^n f_{z_i}(x,y(x),\nabla y(x))v_{x_i}(x)\right)\,dx. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

A prova está completa. □

# 11 Tópicos de análise funcional

Nessa seção $U$ sempre denota um espaço de Banach.

**Teorema 11.1** (O teorema de Hahn-Banach)**.** *Considere um funcional $p: U \to \mathbb{R}$ tal que*

$$p(\lambda u) = \lambda p(u), \forall u \in U, \lambda > 0, \qquad (54)$$

*e*

$$p(u+v) \leq p(u) + p(v), \forall u, v \in U. \qquad (55)$$

*Seja $V \subset U$ um sub-espaço vetorial próprio de $U$ e seja $g: V \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que*

$$g(u) \leq p(u), \forall u \in V. \qquad (56)$$

*Sob tais hipóteses, existe um funcional linear $f: U \to \mathbb{R}$ tal que*

$$g(u) = f(u), \forall u \in V, \qquad (57)$$

*e*

$$f(u) \leq p(u), \forall u \in U. \qquad (58)$$

***Prova*.** Escolha $z \in U \setminus V$. Denote por $\tilde{V}$ o espaço gerado por $V$ e $z$, isto é,

$$\tilde{V} = \{v + \alpha z \mid v \in V \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}\}. \qquad (59)$$

Podemos definir uma extensão de $g$ de $V$ para $\tilde{V}$, denotada por $\tilde{g}$, como

$$\tilde{g}(\alpha z + v) = \alpha \tilde{g}(z) + g(v), \qquad (60)$$

onde $\tilde{g}(z)$ será apropriadamente definido nas próximas linhas. Sejam $v_1, v_2 \in V$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\beta g(v_1) + \alpha g(v_2) &= g(\beta v_1 + \alpha v_2) \\
&= (\alpha+\beta) g\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} v_1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} v_2\right) \\
&\leq (\alpha+\beta) p\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(v_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(v_2 + \beta z)\right) \\
&\leq \beta p(v_1 - \alpha z) + \alpha p(v_2 + \beta z) \qquad (61)
\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{1}{\alpha}[-p(v_1 - \alpha z) + g(v_1)] \leq \frac{1}{\beta}[p(v_2 + \beta z) - g(v_2)],$$

$\forall v_1, v_2 \in V,\ \alpha, \beta > 0$. Logo, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{v \in V, \alpha > 0} \left[\frac{1}{\alpha}(-p(v - \alpha z) + g(v))\right] \leq a \leq \inf_{v \in V, \alpha > 0} \left[\frac{1}{\alpha}(p(v + \alpha z) - g(v))\right]. \qquad (62)$$

Definiremos então $\tilde{g}(z) = a$. Portanto, se $\alpha > 0$ então

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\alpha z + v) &= a\alpha + g(v) \\
&\leq \left[\frac{1}{\alpha}(p(v + \alpha z) - g(v))\right] \alpha + g(v) \\
&= p(v + \alpha z). \qquad (63)
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $\alpha < 0$, então $-\alpha > 0$. Logo,

$$a \geq \frac{1}{-\alpha}(-p(v - (-\alpha) z) + g(v)),$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\alpha z + v) &= a\alpha + g(v) \\
&\leq \left[\frac{1}{-\alpha}(-p(v + \alpha z) + g(v))\right] \alpha + g(v) \\
&= p(v + \alpha z) \qquad (64)
\end{aligned}$$

e assim

$$\tilde{g}(u) \leq p(u), \forall u \in \tilde{V}.$$

Defina agora por $\mathcal{E}$ o conjunto das extensões $e$ de $g$, as quais satisfazem $e(u) \leq p(u)$ no domínio de $e$. Definiremos também uma ordem parcial para $\mathcal{E}$ denotando $e_1 \prec e_2$ quando o domínio de $e_2$ contém o domínio de $e_1$ e $e_1 = e_2$ no domínio de $e_1$. Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ um subconjunto ordenado de $\mathcal{E}$. Seja $V_\alpha$ o domínio de $e_\alpha$ . Defina $e$ em $\cup_{\alpha \in A} V_\alpha$ por setting $e = e_\alpha$ em $V_\alpha$. Claramente $e_\alpha \prec e$, $\forall \alpha \in A$ de modo que cada subconjunto ordenado de $\mathcal{E}$ tem um limitante superior. Pelo lema de Zorn, $\mathcal{E}$ tem um elemento maximal $f$ definido em algum subespaço $\tilde{U} \subset U$ tal que $f(u) \leq p(u), \forall u \in \tilde{U}$. Suponha, para obter contradição, que $\tilde{U} \neq U$ e seja $z_1 \in U \setminus \tilde{U}$. Conforme o exposto acima, podemos obter uma nova extensão $f_1$ de $\tilde{U}$ para o sub-espaço gerado por $z_1$ e $\tilde{U}$, o que contradiz a maximalidade de $f$.

A prova está completa. $\square$

**Definição 11.2** (Espaços duais topológicos)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach. Definiremos o seu espaço dual topológico, como o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos definidos em $U$. Suporemos que tal espaço dual de $U$, poderá ser representado por um outro espaço denotado por $U^*$, mediante uma forma bi-linear $\langle \cdot, \cdot \rangle_U : U \times U^* \to \mathbb{R}$ (aqui estamos nos referindo às representações padrões de espaços duais de espaços de Lebesgue e Sobolev, a serem estudadas nos capítulos sub-sequentes). Assim, dado $f : U \to \mathbb{R}$ linear e contínuo, assumimos a existência de $u^* \in U^*$ tal que*

$$f(u) = \langle u, u^* \rangle_U, \forall u \in U. \tag{65}$$

*A norma de $f$ , denotada por $\|f\|_{U^*}$, é definida como*

$$\|f\|_{U^*} = \sup_{u \in U} \{ |\langle u, u^* \rangle_U| \ : \ \|u\|_U \leq 1 \}. \tag{66}$$

**Corolário 11.3.** *Seja $V \subset U$ um sub-espaço próprio de $U$ e seja $g : V \to \mathbb{R}$ um funcional linear e contínuo com norma*

$$\|g\|_{V^*} = \sup_{u \in V} \{ |g(u)| \mid \|u\|_U \leq 1 \}. \tag{67}$$

*Sob tais hipóteses, existe $u^*$ in $U^*$ tal que*

$$\langle u, u^* \rangle_U = g(u), \forall u \in V, \tag{68}$$

*e*

$$\|u^*\|_{U^*} = \|g\|_{V^*}. \tag{69}$$

***Prova***. Basta aplicar o Teoremma 11.1 com $p(u) = \|g\|_{V^*} \|u\|_V$. De fato, de tal teorema existe um funcional linear $f : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(u) = g(u), \ \forall u \in V$$

e

$$f(u) \leq p(u) = \|g\|_{V^*} \|u\|_U,$$

ou seja

$$|f(u)| \leq p(u) = \|g\|_{V^*} \|u\|_U, \forall u \in U.$$

Portanto,

$$\|f\|_{U^*} = \sup_{u \in U} \{ |f(u)| \ : \ \|u\|_U \leq 1 \} \leq \|g\|_{V^*}.$$

Por outro lado,

$$\|f\|_{U^*} \geq \sup_{u \in V} \{ |f(u)| \ : \ \|u\|_U \leq 1 \} = \|g\|_{V^*}.$$

Logo,

$$\|f\|_{U^*} = \|g\|_{V^*}.$$

Finalmente, sendo $f$ linear e contínuo, existe $u^* \in U^*$ tal que

$$f(u) = \langle u, u^* \rangle_U, \ \forall u \in U,$$

e assim

$$\langle u, u^* \rangle_U = f(u) = g(u), \ \forall u \in V.$$

Além disso,

$$\|u^*\|_{U^*} = \|f\|_{U^*} = \|g\|_{V^*}.$$

A prova está completa. $\square$

**Corolário 11.4.** *Seja $u_0 \in U$. Sob tais hipóteses, existe $u_0^* \in U^*$ tal que*

$$\|u_0^*\|_{U^*} = \|u_0\|_U \ \text{ e } \langle u_0, u_0^* \rangle_U = \|u_0\|_U^2. \tag{70}$$

***Prova***. Basta aplicar o Corolário 11.3 com $V = \{\alpha u_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $g(tu_0) = t\|u_0\|_U^2$ de modo que $\|g\|_{V^*} = \|u_0\|_U$.

De fato, do último corolário existe $u_0^* \in U^*$ tal que

$$\langle tu_0, u_0^* \rangle_U = g(tu_0), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

e

$$\|u_0^*\|_{U^*} = \|g\|_{V^*},$$

onde

$$\|g\|_{V^*} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{t\|u_0\|_U^2 \ : \ \|tu_0\|_U \leq 1\} = \|u_0\|_U.$$

Alem disso, também do último corolário,

$$\|u_0^*\|_{U^*} = \|g\|_{V^*} = \|u_0\|_U.$$

Finalmente,

$$\langle tu_0, u_0^* \rangle_U = g(tu_0) = t\|u_0\|_U^2, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

de modo que

$$\langle u_0, u_0^* \rangle_U = \|u_0\|_U^2.$$

A prova está completa. $\square$

**Corolário 11.5.** *Seja $u \in U$. Sob tais hipóteses*

$$\|u\|_U = \sup_{u^* \in U^*} \{|\langle u, u^* \rangle_U| \mid \|u^*\|_{U^*} \leq 1\}. \tag{71}$$

***Prova***. Suponha que $u \neq \mathbf{0}$, caso contrário o resultado é imediato. Como

$$|\langle u, u^* \rangle_U| \leq \|u\|_U \|u^*\|_{U^*}, \forall u \in U, u^* \in U^*$$

temos que

$$\sup_{u^* \in U^*} \{|\langle u, u^* \rangle_U| \mid \|u^*\|_{U^*} \leq 1\} \leq \|u\|_U. \tag{72}$$

Entretanto, do último corolário, existe $u_0^* \in U^*$ tal que $\|u_0^*\|_{U^*} = \|u\|_U$ e $\langle u, u_0^* \rangle_U = \|u\|_U^2$. Define $u_1^* = \|u\|_U^{-1} u_0^*$. Assim, $\|u_1^*\|_U = 1$ e $\langle u, u_1^* \rangle_U = \|u\|_U$. ☐

**Definição 11.6** (Híper-plano afim)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach. Um híper-plano afim $H$ é um conjunto da forma*

$$H = \{u \in U \mid \langle u, u^* \rangle_U = \alpha\} \tag{73}$$

*para algum $u^* \in U^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

**Proposição 11.7.** *Um híper-plano afim $H$ conforme acima definido é fechado.*

***Prova***. O resultado seqgue-se diretamente da continuidade de $\langle u, u^* \rangle_U$ como um funcional definido em $U$. ☐

**Definição 11.8** (Separação)**.** *Sejam $A, B \subset U$. Dizemos que um híper-plano $H$, definido conforme acima indicado separa $A$ e $B$, quando existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u^* \in U^*$*

$$\langle u, u^* \rangle_U \leq \alpha, \forall u \in A, \text{ e } \langle u, u^* \rangle_U \geq \alpha, \forall u \in B. \tag{74}$$

*Dizemos que $H$ separa $A$ e $B$ estritamente se existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\langle u, u^* \rangle_U \leq \alpha - \varepsilon, \forall u \in A, \text{ e } \langle u, u^* \rangle_U \geq \alpha + \varepsilon, \forall u \in B, \tag{75}$$

**Teorema 11.9** (O teorema de Hahn-Banach, forma geométrica)**.** *Sejam $A, B \subset U$ dois conjuntos convexos, não-vazios e tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A$ é aberto. Sob tais hipóteses, existe um híper-plano fechado que separa $A$ e $B$, isto é, existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u^* \in U^*$ tais que*

$$\langle u, u^* \rangle_U \leq \alpha \leq \langle v, u^* \rangle_U, \ \forall u \in A, \ v \in B.$$

Para provar tal teoremma, precisaremos de dois lemas, a seguir especificados.

**Lema 11.10.** *Seja $C \subset U$ um conjunto convexo e tal que $\mathbf{0} \in C$. Para cada $u \in U$ defina*

$$p(u) = \inf\{\alpha > 0, \ \alpha^{-1} u \in C\}. \tag{76}$$

*Sob tais hipóteses, $p$ é tal que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$0 \leq p(u) \leq M \|u\|_U, \forall u \in U, \tag{77}$$

*e*

$$C = \{u \in U \mid p(u) < 1\}. \tag{78}$$

*Além disso*

$$p(u + v) \leq p(u) + p(v), \forall u, v \in U.$$

***Prova***. Seja $r > 0$ tal que $B(\mathbf{0}, r) \subset C$. Seja $u \in U$ tal que $u \neq \mathbf{0}$. Logo,

$$\frac{u}{\|u\|_U} r \in \overline{B(\mathbf{0}, r)} \subset \overline{C},$$

e portanto

$$p(u) \leq \frac{\|u\|_U}{r}, \forall u \in U \tag{79}$$

o que prova (77). Suponha agora que $u \in C$. Como $C$ é aberto existe $\varepsilon > 0$ sufientemente pequeno tal que $(1+\varepsilon)u \in C$. Portanto $p(u) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Reciprocamente, se $p(u) < 1$, existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\alpha^{-1}u \in C$ e assim, como é $C$ é convexo, temos que $u = \alpha(\alpha^{-1}u) + (1-\alpha)\mathbf{0} \in C$.

Finalmente, sejam $u, v \in C$ e $\varepsilon > 0$. Logo, $\frac{u}{p(u)+\varepsilon} \in C$ e $\frac{v}{p(v)+\varepsilon} \in C$ de modo que $\frac{tu}{p(u)+\varepsilon} + \frac{(1-t)v}{p(v)+\varepsilon} \in C, \forall t \in [0,1]$. Particularmente para $t = \frac{p(u)+\varepsilon}{p(u)+p(v)+2\varepsilon}$ obtemos $\frac{u+v}{p(u)+p(v)+2\varepsilon} \in C$, e assim $p(u+v) \leq p(u) + p(v) + 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ □

**Lema 11.11.** *Seja $C \subset U$ um conjunto aberto e convexo e seja $u_0 \in U$ tal que $u_0 \notin C$. Sob tais hipóteses, existe $u^* \in U^*$ tal que $\langle u, u^* \rangle_U < \langle u_0, u^* \rangle_U, \forall u \in C$*

***Prova***. Por translação se necessário, sem perda de generalidade podemos assumir que $\mathbf{0} \in C$. Considere o funcional $p$ definido no último lema. Defina $V = \{\alpha u_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Defina também $g$ em $V$, por

$$g(tu_0) = t, \; \forall t \in \mathbb{R}. \tag{80}$$

Seja $t \in \mathbb{R}$ tal que $t \neq 0$. Como

$$\frac{tu_0}{t} = u_0 \notin C,$$

temos que

$$g(tu_0) = t \leq p(tu_0)$$

e portanto

$$g(u) \leq p(u), \forall u \in V.$$

Do teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $f$ definido em $U$ o qual extende $g$ e tal que

$$f(u) \leq p(u) \leq M\|u\|_U. \tag{81}$$

Aqui utilizamos o lema 11.10. Em Particular, $f(u_0) = g(u_0) = g(1u_0) = 1$, e também do último lema, $f(u) < 1, \forall u \in C$. A existência de $u^*$ satisfazendo a conclusão do lema segue-se da continuidade de $f$, indicada em (81). □

**Prova do Teorema 11.9.** Defina $C = A + (-B)$ de modo que $C$ é convexo e $\mathbf{0} \notin C$. Do lema 11.11, existe $u^* \in U^*$ tal que $\langle w, u^* \rangle_U < 0, \forall w \in C$, e assim,

$$\langle u, u^* \rangle_U < \langle v, u^* \rangle_U, \forall u \in A, \quad v \in B. \tag{82}$$

Portanto, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{u \in A} \langle u, u^* \rangle_U \leq \alpha \leq \inf_{v \in B} \langle v, u^* \rangle_U, \tag{83}$$

o que completa a prova.

**Proposição 11.12.** *Seja $U$ um espaço de Banach e sejam $A, B \subset U$ tais que $A$ é compacto, $B$ é fechado e $A \cap B = \emptyset$.*

*Sob tais hipóteses, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que*

$$[A + B_{\varepsilon_1}(\mathbf{0})] \cap [B + B_{\varepsilon_1}(\mathbf{0})] = \emptyset.$$

***Prova***. Suponha, para obter contradição, que a conclusão da proposição é falsa.

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in U$ tal que $d(u_n, A) < \frac{1}{n}$ e $d(u_n, B) < \frac{1}{n}$.

Portanto, existem $v_n \in A$ e $w_n \in B$ tais que

$$\|u_n - v_n\|_U < \frac{1}{n} \tag{84}$$

e

$$\|u_n - w_n\|_U < \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{85}$$

Como $\{v_n\} \subset A$ e $A$ é compacto, exitem uma subsequência $\{v_{n_j}\}$ de $\{v_n\}$ e $v_0 \in A$, tais que

$$\|v_{n_j} - v_0\|_U \to 0, \text{ quando } j \to \infty.$$

Logo, disto, (84) e (85) obtemos,

$$\|u_{n_j} - v_0\|_U \to 0, \text{ quando } j \to \infty,$$

e

$$\|w_{n_j} - v_0\|_U \to 0, \text{ quando } j \to \infty.$$

Sendo $A$ e $B$ fechados, obtemos

$$v_0 \in A \cap B,$$

o que contradiz $A \cap B = \emptyset$.

Portanto a conclusão da proposição é verdadeira.

A prova está completa.

□

**Teorema 11.13** (Teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica)**.** *Sejam $A, B \subset U$ dois conjuntos convexos, não-vazios e tais que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que $A$ é compacto e $B$ é fechado. Sob tais hipóteses existe um híper-plano que separa $A$ e $B$ estritamente.*

***Prova***. Observe que, da última proposição, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$ e $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$ são conjuntos convexos e disjuntos. Do Teorema 11.9, existe $u^* \in U^*$ tal que $u^* \neq \mathbf{0}$ e

$$\langle u + \varepsilon w_1, u^* \rangle_U \leq \langle u + \varepsilon w_2, u^* \rangle_U, \forall u \in A, \ v \in B, \ w_1, w_2 \in B(0,1). \tag{86}$$

Logo, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle u, u^* \rangle_U + \varepsilon \|u^*\|_{U^*} \leq \alpha \leq \langle v, u^* \rangle_U - \varepsilon \|u^*\|_{U^*}, \forall u \in A, \ v \in B. \tag{87}$$

□

**Corolário 11.14.** *Suponha que $V \subset U$ é um subespaço vetorial tal que $\overline{V} \neq U$. Sob tais hipóteses, existe $u^* \in U^*$ tal que $u^* \neq \mathbf{0}$ e*

$$\langle u, u^* \rangle_U = 0, \forall u \in V. \tag{88}$$

***Prova***. Seja $u_0 \in U$ tal que $u_0 \notin \overline{V}$. Aplicando o Teorema 11.9 a $A = \overline{V}$ e $B = \{u_0\}$ obtemos $u^* \in U^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $u^* \neq \mathbf{0}$ e

$$\langle u, u^* \rangle_U < \alpha < \langle u_0, u^* \rangle_U, \forall u \in V. \tag{89}$$

Como $V$ é sub-espaço, devemos ter $\langle u, u^* \rangle_U = 0, \forall u \in V$. $\square$

# 12 Topologias Fracas

**Definição 12.1** (Vizinhanças e topologias fracas)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach e seja $u_0 \in U$. Definimos uma vizinhança fraca de $u_0$, denotada por $\mathcal{V}_w(u_0)$, como*

$$\mathcal{V}_w(u_0) = \{u \in U \mid |\langle u - u_0, u_i^* \rangle_U| < \varepsilon_i, \forall i \in \{1, ..., m\}\}, \tag{90}$$

*para algum $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_i > 0$, and $u_i^* \in U^*$, $\forall i \in \{1, ..., m\}$.*

*Seja $A \subset U$. Diremos que $u_0 \in A$ é fracamente interior a $A$, quando existe uma vizinhança fraca $V_w(u_0)$ de $u_0$ contida em $A$.*

*Se todos os pontos de $A$ são fracamente interiores, diremos que $A$ é fracamente aberto.*

*Finalmente, definiremos a topologia fraca $\sigma(U, U^*)$ como o conjunto de todos os subconjuntos fracamente abertos de $U$.*

**Proposição 12.2.** *Um espaço de Banach $U$ é de Hausdorff quando munido com a topologia fraca $\sigma(U, U^*)$.*

***Prova***. Escolha $u_1, u_2 \in U$ tais que $u_1 \neq u_2$. Do Teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica, existe um híper-plano separando $\{u_1\}$ e $\{u_2\}$ estritamente, isto é, existe $u^* \in U^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\langle u_1, u^* \rangle_U < \alpha < \langle u_2, u^* \rangle_U. \tag{91}$$

Defina

$$\mathcal{V}_{w1}(u_1) = \{u \in U \mid |\langle u - u_1, u^* \rangle| < \alpha - \langle u_1, u^* \rangle_U\}, \tag{92}$$

e

$$\mathcal{V}_{w2}(u_2) = \{u \in U \mid |\langle u - u_2, u^* \rangle_U| < \langle u_2, u^* \rangle_U - \alpha\}. \tag{93}$$

Afirmamos que

$$V_{w_1}(u_1) \cap V_{w_2}(u_2) = \emptyset.$$

Suponha, para obter contradição, que $u \in V_{w_1}(u_1) \cap V_{w_2}(u_2)$.

Logo,

$$\langle u - u_1, u^* \rangle_U < \alpha - \langle u_1, u^* \rangle_U,$$

e portanto

$$\langle u, u^* \rangle_U < \alpha.$$

E também

$$-\langle u - u_2, u^* \rangle_U < \langle u_2, u^* \rangle_U - \alpha,$$

e portanto

$$\langle u, u^* \rangle_U > \alpha.$$

Obtivemos então

$$\langle u, u^* \rangle_U < \alpha < \langle u, u^* \rangle_U,$$

uma contradição.

Resumindo, temos que $u_1 \in \mathcal{V}_{w_1}(u_1)$, $u_2 \in \mathcal{V}_{w_2}(u_2)$ e $\mathcal{V}_{w_1}(u_1) \cap \mathcal{V}_{w_2}(u_2) = \emptyset$.

A prova está completa. $\square$

**Observação 12.3.** *Se $\{u_n\} \in U$ é tal que $u_n$ converge para $u$ em $\sigma(U, U^*)$, então escrevemos $u_n \rightharpoonup u$ fracamente.*

**Proposição 12.4.** *Seja $U$ um espaço de Banach. Para uma sequência $\{u_n\} \subset U$, temos que*

1. *$u_n \rightharpoonup u$, para $\sigma(U, U^*) \Leftrightarrow \langle u_n, u^* \rangle_U \to \langle u, u^* \rangle_U, \forall u^* \in U^*$,*
2. *Se $u_n \to u$ fortemente (em norma), então $u_n \rightharpoonup u$ fracamente,*
3. *Se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente, então $\{\|u_n\|_U\}$ é limitada e $\|u\|_U \leq \liminf_{n \to \infty} \|u_n\|_U$,*
4. *Se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente e $u_n^* \to u^*$ fortemente em $U^*$, então $\langle u_n, u_n^* \rangle_U \to \langle u, u^* \rangle_U$.*

***Prova.*** 1. O resultado segue-se da definição de topologia $\sigma(U, U^*)$.

Suponha que $\{u_n\} \subset U$ e $u_n \rightharpoonup u$ fracamente.

Seja $u^* \in U^*$ e seja $\varepsilon > 0$.

Defina

$$V_w(u) = \{v \in U \ : \ |\langle v - u, u^* \rangle_U| < \varepsilon\}.$$

Da hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, então

$$u_n \in V_w(u).$$

Ou seja

$$|\langle u_n - u, u^* \rangle_U| < \varepsilon,$$

se $n > n_0$.

Portanto,
$$\langle u_n, u^* \rangle_U \to \langle u, u^* \rangle_U, \text{ quando } n \to \infty$$
$\forall u^* \in U^*$.

Reciprocamente, suponha que
$$\langle u_n, u^* \rangle_U \to \langle u, u^* \rangle_U, \text{ quando } n \to \infty$$
$\forall u^* \in U^*$.

Seja $V(u) \in \sigma(U, U^*)$ um conjunto fracamente aberto que contém $u$.

Logo existe uma vizinhança fraca $V_w(u)$ tal que $u \in V_w(u) \subset V(u)$, onde existem $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_i > 0$ e $u_i^* \in U^*$ tais que
$$V_w(u) = \{v \in U \;:\; |\langle v - u, u_i^* \rangle_U| < \varepsilon_i, \; \forall i \in \{1, \cdots, m\}\}.$$

Da hipótese, para cada $i \in \{1, \cdots m\}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_i$ então
$$|\langle u_n - u, u_i^* \rangle_U| < \varepsilon_i.$$

Defina $n_0 = \max\{n_1, \cdots, n_m\}$.

Logo
$$u_n \in V_w(u) \subset V(u), \;\; \text{se } n > n_0.$$

Conclui-se então que $u_n \rightharpoonup u$ em $\sigma(U, U^*)$.

2. Isto segue-se da desigualdade
$$|\langle u_n, u^* \rangle_U - \langle u, u^* \rangle_U| \leq \|u^*\|_{U^*} \|u_n - u\|_U. \tag{94}$$

3. Para cada $u^* \in U^*$ a sequência $\{\langle u_n, u^* \rangle_U\}$ é convergente e portanto limitada. Disto e do Princípio da Limitação Uniforme, existe $M > 0$ tal que $\|u_n\|_U \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, para $u^* \in U^*$, temos que
$$|\langle u_n, u^* \rangle_U| \leq \|u^*\|_{U^*} \|u_n\|_U, \tag{95}$$
e fazendo $n \to \infty$, obtemos
$$|\langle u, u^* \rangle_U| \leq \liminf_{n \to \infty} \|u^*\|_{U^*} \|u_n\|_U. \tag{96}$$
Logo,
$$\|u\|_U = \sup_{u^* \in U^*} \{|\langle u, u^* \rangle_U| \;:\; \|u\|_{U^*} \leq 1\} \leq \liminf_{n \to \infty} \|u_n\|_U. \tag{97}$$

4. Apenas observe que

$$\begin{aligned} |\langle u_n, u_n^*\rangle_U - \langle u, u^*\rangle_U| &\leq |\langle u_n, u_n^* - u^*\rangle_U| \\ &\quad +|\langle u - u_n, u^*\rangle_U| \\ &\leq \|u_n^* - u^*\|_{U^*}\|u_n\|_U \\ &\quad +|\langle u_n - u, u^*\rangle_U| \\ &\leq M\|u_n^* - u^*\|_{U^*} \\ &\quad +|\langle u_n - u, u^*\rangle_U| \\ &\to 0, \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned} \tag{98}$$

$\square$

**Teorema 12.5.** *Seja $U$ um espaço de Banach e seja $A \subset U$ um conjunto convexo. Sob tais hipóteses, $A$ é fechado para a topologia $\sigma(U, U^*)$ se, e somente se, $A$ é fechado para a topologia relativa a $\|\cdot\|_U$.*

***Prova***. Se $A = U$ o resultado é imediato. Assuma então $A \neq U$. Suponha que $A$ é fortemente fechado. Seja $u_0 \notin A$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe um híper-plano fechado o qual separa $u_0$ e $A$ estritamente, isto é, existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u^* \in U^*$ tais que

$$\langle u_0, u^*\rangle_U < \alpha < \langle v, u^*\rangle_U, \forall v \in A. \tag{99}$$

Defina

$$\mathcal{V} = \{u \in U \mid \langle u, u^*\rangle_U < \alpha\}, \tag{100}$$

de modo que $u_0 \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \subset U \setminus A$.

Seja

$$V_w(u_0) = \{v \in U \ : \ |\langle v - u_0, u^*\rangle_U| < \alpha - \langle u_0, u^*\rangle_U.$$

Seja $v \in V_w(u_0)$.

Logo,

$$\begin{aligned} \langle v, u^*\rangle_U &= \langle v - u_0 + u_0, u^*\rangle_U \\ &= \langle v - u_0, u^*\rangle_U + \langle u_0, u^*\rangle_U \\ &\leq |\langle v - u_0, u^*\rangle_U| + \langle u_0, u^*\rangle_U \\ &< \alpha - \langle u_0, u^*\rangle_U + \langle u_0, u^*\rangle_U \\ &= \alpha. \end{aligned} \tag{101}$$

Disto conclui-se que $V_w(u_0) \subset \mathcal{V} \subset U \setminus A$, ou seja $u_0$ é ponto interior para a topologia $\sigma(U, U^*)$ de $U \setminus A$, $\forall u_0 \in U \setminus A$

Portanto, $\mathcal{V}$ é fracamente aberto.

Resumindo, $U \setminus A$ é aberto em $\sigma(U, U^*)$ e assim $A$ é fechado em relação à $\sigma(U, U^*)$ (fracamente fechado).

Finalmente, a recíproca é imediata. $\square$

**Teorema 12.6.** *Sejam $(Z, \sigma)$ um espaço topológico e $U$ um espaço de Banach. Seja $\phi : Z \to U$ uma função, considerando $U$ com a topologia fraca $\sigma(U, U^*)$.*

*Sob tais hipóteses, $\phi$ é contínua se, e somente se, $f_{u^*} : Z \to \mathbb{R}$, onde*

$$f_{u^*}(z) = \langle \phi(z), u^* \rangle_U$$

*é contínua, $\forall u^* \in U^*$.*

***Prova.*** Assuma que $\phi$ é contínua. Seja $z_0 \in Z$ e seja $\{z_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma net tal que

$$z_\alpha \to z_0.$$

Da hipótese,

$$\phi(z_\alpha) \rightharpoonup \phi(z_0), \text{ em } \sigma(U, U^*),$$

isto é fracamente.

Portanto

$$\langle \phi(z_\alpha), u^* \rangle_U \to \langle \phi(z_0), u^* \rangle_U, \ \forall u^* \in U^*.$$

Logo $f_{u^*}$ é contínua em $z_0$, $\forall u^* \in U^*$, $\forall z_0 \in Z$.

Reciprocamente, assuma que $f_{u^*} : Z \to \mathbb{R}$, onde

$$f_{u^*}(z) = \langle \phi(z), u^* \rangle_U$$

é contínua, $\forall u^* \in U^*$.

Suponha, para obter contradição que $\phi$ não é contínua.

Assim, existe $z_0 \in Z$ tal que $\phi$ não é contínua em $z_0$.

Em particular, existe uma net $\{z_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $z_\alpha \to z_0$ e não se tem

$$\phi(z_\alpha) \rightharpoonup \phi(z_0), \text{ em } \sigma(U, U^*).$$

Logo, existe $u^* \in U^*$ tal que não se tem,

$$\langle \phi(z_\alpha), u^* \rangle_U \to \langle \phi(z_0), u^* \rangle_U,$$

e portanto $f_{u^*}$ não é contínua em $z_0$, o que contradiz a hipótese dessa parte da prova.

Assim, $\phi$ é contínua.

A prova está completa. $\square$

# 13 A topologia estrela-fraca

**Definição 13.1** (Espaços reflexivos)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach. Dizemos que $U$ é reflexivo, se a injeção canônica*

$$J : U \to U^{**}$$

*é sobrejetiva, onde*

$$\langle u, u^* \rangle_U = \langle u^*, J(u) \rangle_{U^*}, \ \forall u \in U, \ u^* \in U^*.$$

*Assim se $U$ é reflexivo podemos identificar o espaço bi-dual de $U$, $U^{**}$, com $U$.*

*A topologia fraca para $U^*$ pode ser definida similarmente à $\sigma(U, U^*)$ e será denotada por $\sigma(U^*, U^{**})$.*

*Definimos também a topologia estrela-fraca para $U^*$, denotada por $\sigma(U^*, U)$, da seguinte maneira.*

*Primeiramente, definimos vizinhanças estrela-fracas.*

*Seja $u_0^* \in U^*$. Definimos uma vizinhança estrela-fraca de $u_0^*$, denotada por $V_w(u_0^*)$, como*

$$V_w(u_0^*) = \{u^* \in U^* \ : \ |\langle u_i, u^* - u_0^* \rangle_U| < \varepsilon_i, \ \forall i \in \{1, \cdots, m\}\},$$

*onde $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_i > 0$ e $u_i \in U$, $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$.*

*Seja $A \subset U^*$. Diremos que $u_0^* \in A$ é estrela-fracamente interior a $A$, quando existe uma vizinhança estrela-fraca $V_w(u_0^*)$ contida em $A$.*

*Se todos os pontos de $A$ são estrela-fracamente interiores, diremos que $A$ é estrela-fracamente aberto.*

*Finalmente, definiremos a topologia estrela-fraca $\sigma(U^*, U)$ como o conjunto de todos os subconjuntos estrela-fracamente abertos de $U^*$.*

*Observe que $\sigma(U^*, U^{**})$ e $\sigma(U^*, U)$ coincidem se $U$ é reflexivo.*

## 13.1 Compacidade na topologia estrela-fraca

**Teorema 13.2** (Banach e Alaoglu)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach. Denotemos*

$$B_{U^*} = \{u^* \in U^* \ : \ \|u^*\|_{U^*} \leq 1\}.$$

*Sob tais hipóteses, $B_{U^*}$ é compacto com $U^*$ com a topologia estrela-fraca $\sigma(U^*, U)$.*

***Prova.*** Para cada $u \in U$, associaremos um número real $\omega_u$ e denotaremos

$$\omega = \prod_{u \in U} \omega_u \in \mathbb{R}^U,$$

e consideremos as projeções

$$P_u : \mathbb{R}^U \to \mathbb{R}$$

onde

$$P_u(\omega) = \omega_u, \ \forall \omega \in \mathbb{R}^U, \ u \in U.$$

Definiremos uma topologia para $\mathbb{R}^U$, a qual é gerada por vizinhanças fracas a seguir especificadas.

Seja $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^U$. Definiremos uma vizinhança fraca $\tilde{V}(\tilde{\omega})$ de $\tilde{\omega}$ como

$$\tilde{V}(\tilde{w}) = \{\omega \in \mathbb{R}^U \ : \ |P_{u_i}(\omega) - P_{u_i}(\tilde{\omega})| < \varepsilon_i, \ \forall \in \{1, \cdots, m\}\},$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_i > 0$ e $u_i \in U$, $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$.

Seja $A \subset \mathbb{R}^U$. Diremos que $\tilde{\omega} \in A$ é interior a $A$, quando existe uma vizinhança $\tilde{V}_w(\tilde{\omega})$ contida em $A$.

Se todos os pontos de $A$ são interiores, diremos que $A$ é fracamente aberto.

Finalmente, definiremos a topologia fraca $\sigma$ para $\mathbb{R}^U$, como o conjunto de todos os subconjuntos fracamente abertos (dentro desse último contexto) de $\mathbb{R}^U$.

Considere agora $U^*$ com a topologia $\sigma(U^*, U)$ e seja $\phi : U^* \to \mathbb{R}^U$ onde

$$\phi(u^*) = \prod_{u \in U} \langle u, u^* \rangle_U.$$

Mostraremos que $\phi$ é contínuo. Suponha, para obter contradição, que $\phi$ não é contínuo. Assim existe $u^* \in U^*$ tal que $\phi$ não é contínuo em $u^*$.

Logo existe uma net $\{u^*_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que

$$u^*_\alpha \to u^* \text{ em } \sigma(U^*, U),$$

mas não se tem

$$\phi(u^*_\alpha) \to \phi(u^*) \text{ em } \sigma.$$

Portanto existe uma vizinhança fraca $\tilde{V}(\phi(u^*))$ tal que para cada $\beta \in I$ existe $\alpha_\beta \in I$ tal que $\alpha_\beta \succ \beta$ e

$$\phi(u^*_{\alpha_\beta}) \notin \tilde{V}(\phi(u^*)),$$

onde sem perda de generalidade, podemos assumir

$$\tilde{V}(\phi(u^*)) = \{\omega \in \mathbb{R}^U \ : \ |P_{u_i}(w) - P_{u_i}(\phi(u^*))| < \varepsilon_i, \ \forall i \in \{1, \cdots, m\}\},$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_i > 0$ e $u_i \in U$, $\forall i \in \{1, \cdots, m\}$.

Disto obtemos $j \in \{1, \cdots, m\}$ e uma subnet de $\{u^*_{\alpha_\beta}\}$ também denotada por $\{u^*_{\alpha_\beta}\}$ tal que

$$|P_{u_j}(\phi(u^*_{\alpha_\beta})) - P_{u_j}(\phi(u^*))| \geq \varepsilon_j, \forall \alpha_\beta \in I.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |P_{u_j}(\phi(u^*_{\alpha_\beta})) - P_{u_j}(\phi(u^*))| &= |\langle u_j, u^*_{\alpha_\beta} - u^* \rangle_U| \\ &\geq \varepsilon_j, \ \forall \alpha_\beta \in I. \end{aligned} \tag{102}$$

Portanto não temos,

$$\langle u_j, u^*_{\alpha_\beta} \rangle_U \to \langle u_j, u^* \rangle_U,$$

isto é, não temos,

$$u^*_\alpha \to u^*, \text{ em } \sigma(U^*, U),$$

uma contradição.

Logo, $\phi$ é contínua com $\mathbb{R}^U$ com a topologia $\sigma$ acima especificada.

Provaremos agora que

$$\phi^{-1} : \phi(U^*) \to U^*$$

é também contínua.

Isto segue-se da última proposição, considerando que

$$f_u(\omega) = \langle u, \phi^{-1}(w) \rangle_U = \omega_u = P_u(\omega),$$

em $\phi(U^*)$ de modo que $f_u$ é contínuo em $\phi(U^*)$, para todo $u \in U$.

Assim, enfatizamos que disto e da última proposição, $\phi^{-1}$ é contínua.

Por outro lado, observe que

$$\phi(B_{U^*}) = K$$

onde

$$\begin{aligned} K &= \{\omega \in \mathbb{R}^U \;:\; |\omega_u| \leq \|u\|_U, \omega_{u+v} = \omega_u + \omega_v, \\ &\quad \omega_{\lambda u} = \lambda \omega_u, \forall u, v \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \tag{103}$$

Para concluir a prova, é suficiente da continuidade de $\phi^{-1}$, mostrar que $K \subset \mathbb{R}^U$ é compacto com $\mathbb{R}^U$ com a topologia $\sigma$.

Observe que $K = K_1 \cap K_2$ onde

$$K_1 = \{\omega \in \mathbb{R}^U \;:\; |\omega_u| \leq \|u\|_U, \forall u \in U\}, \tag{104}$$

e

$$K_2 = \{\omega \in \mathbb{R}^U \;:\; \omega_{u+v} = \omega_u + \omega_v,\ \omega_{\lambda u} = \lambda \omega_u, \forall u, v \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{105}$$

O conjunto $K_3 = \prod_{u \in U} [-\|u\|_U, \|u\|_U]$ é compacto como o produto cartesiano de intervalos reais compactos.

Como $K_1 \subset K_3$ e $K_1$ é fechado, temos que $K_1$ é compacto (para a topologia $\sigma$ em questão).

Por outro lado, $K_2$ é fechado, pois definindo os conjuntos fechados $A_{u,v}$ e $B_{\lambda,u}$ (esses conjuntos são fechados da continuidade das projeções $P_u$ com $\mathbb{R}^U$ com a topologia $\sigma$, como imagens inversas de fechados em $\mathbb{R}$) por

$$A_{u,v} = \{\omega \in \mathbb{R}^U \;:\; \omega_{u+v} - \omega_u - \omega_v = 0\}, \tag{106}$$

e

$$B_{\lambda,u} = \{\omega \in \mathbb{R}^U \;:\; \omega_{\lambda u} - \lambda \omega_u = 0\} \tag{107}$$

temos que

$$K_2 = (\cap_{u,v \in U} A_{u,v}) \cap (\cap_{(\lambda,u) \in \mathbb{R} \times U} B_{\lambda,u}). \tag{108}$$

Relembramos que $K_2$ é fechado pois intersecções de fechados são sempre fechados.

Finalmente, temos que $K_1 \cap K_2 \subset K_1$ é compacto, o que completa a prova. $\square$

For this chapter the most relevant reference is Ekeland and Temam, [?].

# 14 Conjuntos e funções convexas

Seja $S$ um subconjunto de um espaço vetorial $U$. Dizemos que $S$ é convexo quando

$$\lambda u + (1-\lambda)v \in S,\ \forall u, v \in S,\ \lambda \in [0,1]. \tag{109}$$

**Definição 14.1** (Envelope convexo). *Seja $S$ um subconjunto de um espaço vetorial $U$. Definimos o envelope convexo de $S$, denotado por $Co(S)$ como*

$$\begin{aligned} Co(S) \;=\; & \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \mid n \in \mathbb{N}, \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0,\ u_i \in S, \forall i \in \{1, ..., n\} \right\}. \end{aligned} \tag{110}$$

**Definição 14.2** (Funcional convexo). *Seja $U$ um espaço vetorial e seja $S \subset U$ um conjunto convexo. Um funcional $F : S \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ é dito ser convexo, quando*

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v), \forall u, v \in S, \lambda \in [0,1]. \tag{111}$$

## 14.1 Semi-continuidade inferior fraca

Começamos com a definição de Epígrafo.

**Definição 14.3** (Epígrafo). *Seja $U$ um espaço de Banach e seja $F : U \to \bar{\mathbb{R}}$ um funcional.*

*Definimos o epígrafo de $F$, denotado por $Epi(F)$ como*

$$Epi(F) = \{(u, a) \in U \times \mathbb{R} \mid a \geq F(u)\}.$$

**Definição 14.4.** *Seja $U$ um espaço de Banach. Considre a topologia fraca $\sigma(U, U^*)$ para $U$ e seja $F : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional. Seja $u \in U$. Dizemos que $F$ é fracamente semi-contínuo inferiormente em $u \in U$ quando para cada $\lambda < F(u)$, existe uma vizinhança fraca $V_\lambda(u) \in \sigma(U, U^*)$ tal que*

$$F(v) > \lambda,\ \forall v \in V_\lambda(u).$$

*Se $F$ is fracamente semi-contínuo inferiormente (f.s.c.i) em todo $U$, dizemos simplemente que $F$ é f.s.c.i..*

**Teorema 14.5.** *Seja $U$ um espaço de Banach e seja $F : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional.*

*Sob tais hipóteses, as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *$F$ é f.s.c.i..*
2. *$Epi(F)$ é fechado em $U \times \mathbb{R}$ com a topologia produto entre $\sigma(U, U^*)$ e a topologia usual para $\mathbb{R}$.*
3. *$H_\gamma^F = \{u \in U \mid F(u) \leq \gamma\}$ é fechado em $\sigma(U, U^*)$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$.*

4. *O conjunto* $G_\gamma^F = \{u \in U \mid F(u) > \gamma\}$ *é aberto em* $\sigma(U, U^*), \forall \gamma \in \mathbb{R}$.

5.
$$\liminf_{v \rightharpoonup u} F(v) \geq F(u), \forall u \in U,$$
*onde*
$$\liminf_{v \rightharpoonup u} F(v) = \sup_{V(u) \in \sigma(U,U^*)} \inf_{v \in V(u)} F(v).$$

***Prova***. Assuma que $F$ is f.s.c.i.. Mostraremos que $Epi(F)^c$ é aberto em $\sigma(U, U^*) \times \mathbb{R}$. Escolha $(u, r) \in Epi(F)^c$. Assim $(u, r) \notin Epi(F)$, de modo que $r < F(u)$. Selecione $\lambda$ tal que $r < \lambda < F(u)$. Sendo $F$ f.s.c.i em $u$, existe uma vizinhança fraca $V_\lambda(u)$ tal que
$$F(v) > \lambda, \forall v \in V_\lambda(u).$$
Logo
$$V_\lambda(u) \times (-\infty, \lambda) \subset Epi(F)^c$$
de modo que $(u, r)$ é ponto interior de $Epi(F)^c$ e assim , sendo tal ponto em $Epi(F)^c$ arbitrário, podemos concluir que $Epi(F)^c$ é aberto de modo que $Epi(F)$ é fechado em $\sigma(U, U^*) \times \mathbb{R}$.

Assuma agora (2). Observe que
$$H_\gamma^F \times \{\gamma\} = Epi(F) \cap (U \times \{\gamma\}).$$
Da hipótese $Epi(F)$ é fechado, ou seja $H_\gamma^F \times \{\gamma\}$ é fechado e portanto $H_\gamma^F$ é fechado.

Assuma (3). Para obter (4), basta tomar o complemento de $H_\gamma^F$. Suponha que (4) é válida. Seja $u \in U$ e seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que
$$\gamma < F(u).$$
Como $G_\gamma^F$ é aberto em $\sigma(U, U^*)$ existe uma vizinhança fraca $V(u)$ tal que
$$V(u) \subset G_\gamma^F,$$
de modo que
$$F(v) > \gamma, \ \forall v \in V(u),$$
e portanto
$$\inf_{v \in V(u)} F(v) \geq \gamma.$$
Em particular teremos,
$$\liminf_{v \rightharpoonup u} F(v) \geq \gamma.$$
Fazendo $\gamma \to F(u)$, obtemos
$$\liminf_{v \rightharpoonup u} F(v) \geq F(u).$$
Finalmente assuma que
$$\liminf_{v \rightharpoonup u} F(v) \geq F(u).$$

Seja $\lambda < F(u)$ e seja $0 < \varepsilon < F(u) - \lambda$.

Observe que

$$\liminf_{v \rightharpoonup u} F(v) = \sup_{V(u) \in \sigma(U,U^*)} \inf_{v \in V(u)} F(v).$$

Assim, existe uma vizinhança fraca $V(u)$ tal que $F(v) \geq F(u) - \varepsilon > \lambda, \forall v \in V(u)$. A prova está completa. $\square$

Resultado similar é válido para a topologia forte (em norma) de um espaço de Banach $U$ de modo que um funcional $F : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é fortemente semi-contínuo inferiormente (s.c.i.) em $u \in U$, quando

$$\liminf_{v \to u} F(v) \geq F(u). \tag{112}$$

**Corolário 14.6.** *Todo funcional convexo e s.c.i $F : U \to \overline{\mathbb{R}}$ é também f.s.c.i..*

***Prova.*** O resultado segue-se do último teorema e do fato que o epígrafo de $F$ é convexo e fortemente fechado. Assim tal epígrafo é também fracamente fechado. $\square$

**Definição 14.7** (Funcionais afim-contínuos)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach. Um funcional $F : U \to \mathbb{R}$ é dito ser afim-contínuo se existem $u^* \in U^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que*

$$F(u) = \langle u, u^* \rangle_U + \alpha, \forall u \in U. \tag{113}$$

**Definição 14.8** ($\Gamma(U)$)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach. Dizemos que $F : U \to \bar{\mathbb{R}}$ pertence à $\Gamma(U)$ e escrevemos $F \in \Gamma(U)$ quando $F$ pode ser representado pontualmente como o supremo de uma família de funcionais afim-contínuos. Se $F \in \Gamma(U)$, e $F(u) \in \mathbb{R}$ para algum $u \in U$ escrevemos $F \in \Gamma_0(U)$.*

**Definição 14.9** (Envelope convexo)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach. Seja $F : U \to \bar{\mathbb{R}}$, um funcional. Definimos o seu envelope convexo, denotado por $CF : U \to \bar{\mathbb{R}}$, como*

$$CF(u) = \sup_{(u^*,\alpha) \in A^*} \{\langle u, u^* \rangle + \alpha\}, \tag{114}$$

*onde*

$$A^* = \{(u^*, \alpha) \in U^* \times \mathbb{R} \mid \langle v, u^* \rangle_U + \alpha \leq F(v), \forall v \in U\} \tag{115}$$

**Definição 14.10** (Funcional polar)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach e seja $F : U \to \bar{\mathbb{R}}$, um funcional. Definimos o funcional polar de $F$, denotado por $F^* : U^* \to \bar{\mathbb{R}}$, como*

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in U} \{\langle u, u^* \rangle_U - F(u)\}, \forall u^* \in U^*. \tag{116}$$

**Definição 14.11** (Funcional bipolar)**.** *Seja $U$ um espaço de Banch e seja $F : U \to \bar{\mathbb{R}}$ um funcional. Definimos o funcional bipolar de $F$, denotado por $F^{**} : U \to \bar{\mathbb{R}}$, como*

$$F^{**}(u) = \sup_{u^* \in U^*} \{\langle u, u^* \rangle_U - F^*(u^*)\}, \forall u \in U. \tag{117}$$

**Proposição 14.12.** *Seja $U$ um espaço de Banach e seja $F : U \to \bar{\mathbb{R}}$ um funcional. Sob tais hipóteses $F^{**}(u) = CF(u)$, $\forall u \in U$ e em particular se $F \in \Gamma(U)$, então $F^{**}(u) = F(u), \forall u \in U$.*

***Prova.*** Por definição temos que o envelope convexo de $F$ é o supremo de minorantes afim-contínuos de $F$ no ponto em questão. De fato precisamos considerar apenas os minorantes maximais, istó é, na forma

$$u \mapsto \langle u, u^* \rangle_U - F^*(u^*). \tag{118}$$

Logo,

$$CF(u) = \sup_{u^* \in U^*} \{\langle u, u^* \rangle_U - F^*(u^*)\} = F^{**}(u). \tag{119}$$

□

**Corolário 14.13.** *Seja $U$ um espaço de Banach e seja $F : U \to \bar{\mathbb{R}}$ um funcional. Sob tais hipóteses, $F^* = F^{***}$.*

***Prova.*** Como $F^{**} \leq F$, obtemos

$$F^* \leq F^{***}. \tag{120}$$

Por outro lado,

$$F^{**}(u) \geq \langle u, u^* \rangle_U - F^*(u^*), \tag{121}$$

de modo que

$$F^{***}(u^*) = \sup_{u \in U}\{\langle u, u^* \rangle_U - F^{**}(u)\} \leq F^*(u^*). \tag{122}$$

De (120) e (122), obtemos $F^*(u^*) = F^{***}(u^*)$, $\forall u^* \in U^*$. □

Nesse ponto do texto, relembramos a definição de diferenciabilidade à Gâteaux.

**Definição 14.14** (Diferenciabilidade à Gâteaux)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach. Um funcional $F : U \to \bar{\mathbb{R}}$ é dito ser diferenciável à Gâteaux em $u \in U$, quando existe $u^* \in U^*$ tal que*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F(u + \lambda h) - F(u)}{\lambda} = \langle h, u^* \rangle_U, \quad \forall h \in U. \tag{123}$$

*O vetor $u^*$ é dito ser o diferencial à Gâteaux de $F : U \to \mathbb{R}$ em $u$ e pode ser denotado como se segue:*

$$u^* = \frac{\partial F(u)}{\partial u} \text{ ou } u^* = \delta F(u) \tag{124}$$

**Definição 14.15** (Sub-gradientes)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach e seja $F : U \to \bar{\mathbb{R}}$ um funcional. Definimos o conjunto dos sub-gradientes de $F$ em $u$, denotado por $\partial F(u)$, como*

$$\begin{aligned} \partial F(u) &= \{u^* \in U^*, \text{ tal que} \\ &\quad \langle v - u, u^* \rangle_U + F(u) \le F(v), \forall v \in U\}. \end{aligned} \tag{125}$$

Relembraremos também nesse ponto a definição de operador adjunto.

**Definição 14.16** (Operador adjunto)**.** *Sejam $U$ e $Y$ espaços de Banach e seja $\Lambda : U \to Y$ um operador linear e contínuo. O operador adjunto de $\Lambda$, denotado por $\Lambda^* : Y^* \to U^*$ é definido pela equação:*

$$\langle u, \Lambda^* v^* \rangle_U = \langle \Lambda u, v^* \rangle_Y, \ \forall u \in U, \ v^* \in Y^*. \tag{126}$$

**Lema 14.17** (Continuidade de funções convexas)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach e seja $F : U \to \mathbb{R}$ um funcional convexo.*

*Seja $u \in U$ e suponha que existe $a > 0$ e uma vizinhança $V$ de $u$ tal que*

$$F(v) < a < +\infty, \ \forall v \in V.$$

*Sob tais hipóteses, $F$ é contínua em $u$.*

***Prova***. Trabalhando com $G(v) = F(v + u) - F(u)$ se necessário, podemos reduzir o problema ao caso em que $u = \mathbf{0}$ e $F(u) = 0$. Seja então $\mathcal{V}$ uma vizinhança de $\mathbf{0}$ tal que $F(v) \le a < +\infty, \forall v \in \mathcal{V}$. Defina $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap (-\mathcal{V})$. Escolha $\varepsilon \in (0, 1)$. Seja $v \in \varepsilon\mathcal{W}$, logo

$$\frac{v}{\varepsilon} \in \mathcal{V} \tag{127}$$

e sendo $F$ convexo, temos que

$$F(v) = F\left((1-\varepsilon)\mathbf{0} + \varepsilon\frac{v}{\varepsilon}\right) \le (1-\varepsilon)F(\mathbf{0}) + \varepsilon F(v/\varepsilon) \le \varepsilon a. \tag{128}$$

Também

$$\frac{-v}{\varepsilon} \in \mathcal{V}. \tag{129}$$

Assim,

$$F(\theta) = F\left(\frac{v}{1+\varepsilon} + \varepsilon\frac{(-v/\varepsilon)}{1+\varepsilon}\right) \le \frac{F(v)}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}F(-v/\varepsilon),$$

de modo que

$$F(v) \ge (1+\varepsilon)F(\theta) - \varepsilon F(-v/\varepsilon) \ge -\varepsilon a. \tag{130}$$

Portanto

$$|F(v)| \le \varepsilon a, \forall v \in \varepsilon\mathcal{W}, \tag{131}$$

isto é, $F$ é contínuo em $u = \mathbf{0}$. $\square$

**Proposição 14.18.** *Seja $U$ um espaço de Banach e seja $F : U \to \bar{\mathbb{R}}$ uma funcional convexo, finito e contínuo em $u \in U$. Sob tais hipóteses, $\partial F(u) \neq \emptyset$.*

***Prova.*** Como $F$ é convexo, $Epi(F)$ é convexo. Sendo $F$ contínuo em $u$, temos que $Epi(F)^0$ é não-vazio. Observe que $(u, F(u))$ pertence à fronteira de $Epi(F)$. Portanto, denotando $A = Epi(F)$, do teorema de Hahn-Banach existe um híper-plano $H$ fechado o qual separa $(u, F(u))$ e $A^0$, onde $H$

$$H = \{(v, a) \in U \times \mathbb{R} \mid \langle v, u^* \rangle_U + \alpha a = \beta\}, \tag{132}$$

para alguns fixos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u^* \in U^*$, de modo que

$$\langle v, u^* \rangle_U + \alpha a \geq \beta, \forall (v, a) \in Epi(F), \tag{133}$$

e

$$\langle u, u^* \rangle_U + \alpha F(u) = \beta, \tag{134}$$

onde $(\alpha, \beta, u^*) \neq (0, 0, \mathbf{0})$. Suponha, para obter contradição, que $\alpha = 0$.

Assim,

$$\langle v - u, u^* \rangle_U \geq 0, \forall v \in U, \tag{135}$$

e portanto obtemos, $u^* = \mathbf{0}$ e $\beta = 0$, uma contradição. Logo podemos assumir $\alpha > 0$ (considerando (133)) e assim $\forall v \in U$ temos que

$$\frac{\beta}{\alpha} - \langle v, u^*/\alpha \rangle_U \leq F(v), \tag{136}$$

e

$$\frac{\beta}{\alpha} - \langle u, u^*/\alpha \rangle_U = F(u), \tag{137}$$

ou seja,

$$\langle v - u, -u^*/\alpha \rangle_U + F(u) \leq F(v), \forall v \in U, \tag{138}$$

isto é,

$$-u^*/\alpha \in \partial F(u). \tag{139}$$

A prova está completa. $\square$

**Definição 14.19** (Função de Carathéodory)**.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Dizemos que $g : S \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory quando*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^l,\ x \mapsto g(x, \xi) \text{ é uma função mensurável,}$$

*e*

$$\text{para quase todo } x \in S,\ \xi \mapsto g(x, \xi) \text{ é uma função contínua.}$$

Para as próximas duas proposições não apresentaremos as provas. Indicaremos a bibliografia futuramente.

**Proposição 14.20.** *Sejam* $E$ *e* $F$ *dosis espaços de Banach,* $S$ *um subconjunto de Borel de* $\mathbb{R}^n$*, e* $g : S \times E \to F$ *uma função de Carathéodory. Assim, para cada função mensurável* $u : S \to E$*, seja* $G_1(u)$ *a função mensurável* $x \mapsto g(x, u(x)) \in F$*.*

*Se* $G_1$ *mapeia* $L^p(S, E)$ *em* $L^r(S, F)$ *para* $1 \le p, r < \infty$*, então* $G_1$ *é fortemente contínuo.*

Para o funcional $G : U \to \mathbb{R}$, definido por $G(u) = \int_S g(x, u(x))dS$ , onde $U = U^* = [L^2(S)]^l$, temos o seguinte resultado.

**Proposição 14.21.** *Considerando o enunciado da última proposição podemos expressar* $G^* : U^* \to \bar{\mathbb{R}}$ *como*

$$G^*(u^*) = \int_S g^*(x, u^*(x))dx, \tag{140}$$

*onde* $g^*(x, y) = \sup\limits_{\eta \in \mathbb{R}^l}(y \cdot \eta - g(x, \eta))$*, para quase todo* $x \in S$*.*

Para funcionais não convexos, em certas situações pode ser difícil expressar analiticamente condições para um extremo global.

Este fato motiva a definição da Transformada de Legendre, a qual é obtida mediante um extremo local.

**Definição 14.22** (Transformada de Legendre e funcional associado)**.** *Considere a função de classe* $C^2$*,* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Sua transformada de Legendre, denotada por* $g_L^* : R_L^n \to \mathbb{R}$*, é expressa por*

$$g_L^*(y^*) = \sum_{i=1}^{n} x_{0^i} \cdot y_i^* - g(x_0), \tag{141}$$

*onde* $x_0$ *é solução do sistema*

$$y_i^* = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i}, \tag{142}$$

*e* $R_L^n = \{y^* \in \mathbb{R}^n$ *tal que a equação (142) tem solução única* $\}$*.*

*Além disso, considerando o funcional* $G : Y \to \mathbb{R}$ *definido como* $G(v) = \int_S g(v)dS$*, definimos o funcional de Legendre associado* $G_L^* : Y_L^* \to \mathbb{R}$ *como*

$$G_L^*(v^*) = \int_S g_L^*(v^*)\, dx, \tag{143}$$

*onde* $Y_L^* = \{v^* \in Y^* \mid v^*(x) \in R_L^n,$ *em quase todo* $S\}$*.*

Sobre a transformada de Legendre, temos os seguintes resultados.

**Proposição 14.23.** *Considerando o enunciado das últimas definições, seja $y_0^* \in R_L^n$ tal que*

$$det\left\{\frac{\partial^2 g(x_0(y_0^*))}{\partial x_i \partial x_j}\right\} \neq 0.$$

*Sob tais hipóteses a função*

$$x_0 = x_0(y^*) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]^{-1}(y^*),$$

*está bem definida e é de classe $C^1$ numa vizinhança de $y_0^*$.*

*Além disso, para $y^*$ em tal vizinhança, temos que*

$$y_i^* = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i} \Leftrightarrow x_{0^i} = \frac{\partial g_L^*(y^*)}{\partial y_i^*} \tag{144}$$

***Prova***. A função

$$x_0 = x_0(y^*) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]^{-1}(y^*)$$

estar bem definida e ser de classe $C^1$ numa vizinhança de $y_0^*$ resulta do teorema da função inversa.

Por outro lado, assuma que para $y^*$ em tal vizinhança,

$$y_i^* = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i},\ \forall\, i \in \{1, ..., n\}, \tag{145}$$

assim

$$g_L^*(y^*) = \sum_{i=1}^n y_i^* x_{0^i} - g(x_0) \tag{146}$$

derivando em relação a $y_i^*$, obtemos

$$\frac{\partial g_L^*(y^*)}{\partial y_i^*} = \sum_{j=1}^n y_j^* \frac{\partial x_{0^j}}{\partial y_i^*} + x_{0^i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_j}\frac{\partial x_{0^j}}{\partial y_i^*}, \tag{147}$$

ou seja

$$\frac{\partial g_L^*(y^*)}{\partial y_i^*} = \sum_{i=1}^n \left(y_j^* - \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_{0^j}}{\partial y_i^*} + x_{0^i} \tag{148}$$

o que de (145) implica que

$$\frac{\partial g_L^*(y^*)}{\partial y_i^*} = x_{0^i},\ \forall\, i \in \{1, ..., n\}. \tag{149}$$

Isto completa a primeira parte da prova. Reciprocamente, suponha que, para $y^*$ na referida vizinhança, definamos

$$x_{0^i} = \frac{\partial g_L^*(y^*)}{\partial y_i^*}, \ \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{150}$$

Como $y^* \in R_L^n$ existe um único $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$y_i^* = \frac{\partial g(\bar{x}_0)}{\partial x_i} \ \forall i \in \{1, ..., n\}, \tag{151}$$

e,

$$g_L^*(y^*) = \sum_{i=1}^n y_i^* \bar{x}_{0^i} - g(\bar{x}_0) \tag{152}$$

e portanto derivando em relação à $y_i^*$, obtemos

$$\frac{\partial g_L^*(y^*)}{\partial y_i^*} = \sum_{j=1}^n y_j^* \frac{\partial \bar{x}_{0^j}}{\partial y_i^*} + \bar{x}_{0^i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(\bar{x}_0)}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{x}_{0^j}}{\partial y_i^*}, \tag{153}$$

$\forall \ i \in \{1, ..., n\}$, de modo que

$$\frac{\partial g_L^*(y^*)}{\partial y_i^*} = \sum_{j=1}^n \left( y_j^* - \frac{\partial g(\bar{x}_0)}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{x}_{0^j}}{\partial y_i^*} + \bar{x}_{0^i} \tag{154}$$

$\forall \ i \in \{1, ..., n\}$, o que de (150) e (151), implica que

$$\bar{x}_{0^i} = \frac{\partial g_L^*(y^*)}{\partial y_i^*} = x_{0^i}, \ \ \forall \ \ i \in \{1, ..., n\}. \tag{155}$$

Disto e (151), obtemos

$$y_i^* = \frac{\partial g(\bar{x}_0)}{\partial x_i} = \frac{\partial g(x_0)}{\partial x_i} \ \ \forall \ \ i \in \{1, ..., n\}. \tag{156}$$

A prova está completa. $\square$

**Teorema 14.24.** *Considere o funcional $J : U \to \bar{\mathbb{R}}$ definido por $J(u) = (G \circ \Lambda)(u) - \langle u, f \rangle_U$ onde $\Lambda(= \{\Lambda_i\}) : U \to Y$ ($i \in \{1, ..., n\}$) é um operador contínuo e linear e, $G : Y \to \mathbb{R}$ é um funcional expresso por $G(v) = \int_S g(v)dx$, $\forall v \in Y$ (aqui $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2$ a qual admite tranformada de Legendre denotada por $g_L^* : R_L^n \to \mathbb{R}$. Isto é, as hipóteses da Proposição 14.23 são satifeitas em $R_L^n$).*

*Sob tais hipóteses, temos que*

$$\delta J(u_0) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \delta(-G_L^*(v_0^*) + \langle u_0, \Lambda^* v_0^* - f \rangle_U) = \mathbf{0}, \tag{157}$$

*onde $v_0^* = \frac{\partial G(\Lambda(u_0))}{\partial v}$ é suposto ser tal que $v_0^*(x) \in R_L^n$, em $S$ e nesse caso*

$$J(u_0) = -G_L^*(v_0^*). \tag{158}$$

***Prova***. Suponha primeiramente que $\delta J(u_0) = \mathbf{0}$, isto é:

$$\Lambda^* \frac{\partial G(\Lambda u_0)}{\partial v} - f = \mathbf{0} \tag{159}$$

e assim, de $v_0^* = \frac{\partial G(\Lambda u_0)}{\partial v}$ obtemos

$$\Lambda^* v_0^* - f = \mathbf{0}, \tag{160}$$

e

$$v_{0^i}^* = \frac{\partial g(\Lambda u_0)}{\partial x_i}. \tag{161}$$

Logo, da última proposição, podemos escrever,

$$\Lambda_i(u_0) = \frac{\partial g_L^*(v_0^*)}{\partial y_i^*}, \text{ for } i \in \{1, .., n\} \tag{162}$$

de modo que

$$\Lambda u_0 = \frac{\partial G_L^*(v_0^*)}{\partial v^*}. \tag{163}$$

Portanto, de (160) e (163) obtemos,

$$\delta(-G_L^*(v_0^*) + \langle u_0, \Lambda^* v_0^* - f \rangle_U) = \mathbf{0}. \tag{164}$$

Isto completa a primeira parte da prova.

Reciprocamente, suponha que

$$\delta(-G_L^*(v_0^*) + \langle u_0, \Lambda^* v_0^* - f \rangle_U) = \mathbf{0}, \tag{165}$$

isto é

$$\Lambda^* v_0^* - f = \mathbf{0} \tag{166}$$

e

$$\Lambda u_0 = \frac{\partial G_L^*(v_0^*)}{\partial v^*}. \tag{167}$$

Claramente, de (167), da última proposição e de (166), podemos escrever

$$v_0^* = \frac{\partial G(\Lambda(u_0))}{\partial v} \tag{168}$$

e

$$\Lambda^* \frac{\partial G(\Lambda u_0)}{\partial v} - f = \mathbf{0}, \tag{169}$$

de modo que

$$\delta J(u_0) = \mathbf{0}. \tag{170}$$

Finalmente,

$$J(u_0) = G(\Lambda u_0) - \langle u_0, f\rangle_U \tag{171}$$

e disto, (166) e (168) temos que

$$\begin{aligned} J(u_0) &= G(\Lambda u_0) - \langle u_0, \Lambda^* v_0^*\rangle_U \\ &= G(\Lambda u_0) - \langle \Lambda u_0, v_0^*\rangle_Y \\ &= -G_L^*(v_0^*). \end{aligned} \tag{172}$$

A prova está completa. □

**Teorema 14.25** (Toland, 1979)**.** *Seja $U$ um espaço de Banach e sejam $F, G : U \to \mathbb{R}$ funcionais tais que*

$$\inf_{u \in U}\{G(u) - F(u)\} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

*Sob tais hipóteses*

$$F^*(u^*) - G^*(u^*) \geq \alpha, \ \forall u^* \in U^*.$$

*Além disso, suponha que $u_0 \in U$ seja tal que*

$$G(u_0) - F(u_0) = \min_{u \in U}\{G(u) - F(u)\} = \alpha.$$

*Assuma também que $u_0^* \in \partial F(u_0)$.*
*Sob tais hipóteses,*

$$F^*(u_0^*) - G^*(u_0^*) = \alpha,$$

*de modo que*

$$\begin{aligned} G(u_0) - F(u_0) &= \min_{u \in U}\{G(u) - F(u)\} \\ &= \min_{u^* \in U^*}\{F^*(u^*) - G^*(u^*)\} \\ &= F^*(u_0^*) - G^*(u_0^*). \end{aligned} \tag{173}$$

***Prova***. Das hipóteses,

$$\inf_{u \in U}\{G(u) - F(u)\} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$G(u) - F(u) \geq \alpha, \ \forall u \in U.$$

Portanto, para $u^* \in U^*$, temos que

$$-\langle u,u^*\rangle_U+G(u)+\langle u,u^*\rangle_U-F(u)\geq\alpha,\ \forall u\in U.$$

Thus,

$$-\langle u,u^*\rangle_U+G(u)+\sup_{u\in U}\{\langle u,u^*\rangle_U-F(u)\}\geq\alpha,\ \forall u\in U,$$

ou seja

$$-\langle u,u^*\rangle_U+G(u)+F^*(u^*)\geq\alpha,\ \forall u\in U,$$

de modo que

$$\inf_{u\in U}\{-\langle u,u^*\rangle_U+G(u)\}+F^*(u^*)\geq\alpha,$$

isto é,

$$-G^*(u^*)+F^*(u^*)\geq\alpha,\ \forall u^*\in U^*. \tag{174}$$

Também das hipóteses,

$$G(u_0)-F(u_0)\leq G(u)-F(u),\ \forall u\in U. \tag{175}$$

Por outro lado de $u_0^*\in\partial F(u_0)$, obtemos

$$\langle u_0,u_0^*\rangle_U-F(u_0)\geq\langle u,u_0^*\rangle_U-F(u),\ \forall u\in U$$

de modo que

$$-F(u)\leq\langle u_0-u,u_0^*\rangle_U-F(u_0),\ \forall u\in U.$$

Disto e (175), obtemos,

$$G(u_0)-F(u_0)\leq G(u)+\langle u_0-u,u_0^*\rangle_U-F(u_0),\ \forall u\in U. \tag{176}$$

de modo que,

$$\langle u_0,u_0^*\rangle_U-G(u_0)\geq\langle u,u_0^*\rangle_U-G(u),\ \forall u\in U,$$

ou seja

$$\begin{aligned}G^*(u_0^*)&=\sup_{u\in U}\{\langle u,u_0^*\rangle_U-G(u)\}\\&=\langle u_0,u_0^*\rangle_U-G(u_0).\end{aligned} \tag{177}$$

Resumindo, obtivemos

$$G^*(u_0^*)=\langle u_0,u_0^*\rangle_U-G(u_0),$$

e

$$F^*(u_0^*)=\langle u_0,u_0^*\rangle_U-F(u_0).$$

Logo,

$$F^*(u_0) - G^*(u_0^*) = G(u_0) - F(u_0) = \alpha.$$

Disto e (174), temos que

$$\begin{aligned} G(u_0) - F(u_0) &= \min_{u \in U}\{G(u) - F(u)\} \\ &= \min_{u^* \in U^*}\{F^*(u^*) - G^*(u^*)\} \\ &= F^*(u_0^*) - G^*(u_0^*). \end{aligned} \tag{178}$$

A prova está completa. $\square$

**Exercício 14.26.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto de classe $\hat{C}^1$. Seja $V = C^1(\overline{\Omega})$ e seja $J : D \subset V \to \mathbb{R}$ onde*

$$J(u) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx - \int_\Omega fu \, dx, \; \forall u \in U$$

*e onde*

$$D = \{u \in V \; : \; u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

1. *Prove que $J$ é convexo.*
2. *Prove que $u_0 \in D$ tal que*
$$\gamma \nabla^2 u_0 + f = 0, \; \text{ em } \Omega,$$
*minimiza $J$ em $D$.*
3. *Prove que*
$$\inf_{u \in U} J(u) \geq \sup_{v^* \in Y^*}\{-G^*(v^*) - F^*(-\Lambda^* v^*)\},$$
*onde*
$$G(\nabla u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx,$$
*e*
$$G^*(v^*) = \sup_{v \in Y}\{\langle v, v^* \rangle_Y - G(v)\},$$
*onde $Y = Y^* = L^2(\Omega)$.*
*E também, definimos $\Lambda : U \to Y$ por*
$$\Lambda u = \nabla u,$$
*e*
$$F : D \to \mathbb{R}$$
*como*
$$F(u) = \int_\Omega fu \, dx,$$
*de modo que*

$$
\begin{aligned}
F^*(-\Lambda^* v^*) &= \sup_{u\in D}\{-\langle \nabla u, v^*\rangle_Y - F(u)\} \\
&= \sup_{u\in D}\left\{\langle u, div\ v^*\rangle_Y + \int_\Omega f u\ dx\right\} \\
&= \sup_{u\in D}\left\{\int_\Omega (div\ v^* + f)\ u\ dx\right\} \\
&= \left\{\begin{array}{ll} 0, & se\ div(v^*) + f = 0,\ \ em\ \Omega \\ +\infty, & de\ outra\ forma. \end{array}\right.
\end{aligned} \tag{179}
$$

*4. Prove que $v_0^* = \gamma \nabla u_0$ é tal que*

$$
\begin{aligned}
J(u_0) &= \min_{u\in D} J(u) \\
&= \min_{u\in D}\{G(\Lambda u) + F(u)\} \\
&= \max_{v^*\in Y^*}\{-G^*(v^*) - F^*(-\Lambda^* v^*)\} \\
&= -G^*(v_0^*) - F^*(-\Lambda^* v_0^*).
\end{aligned} \tag{180}
$$

*Solução: Seja $u \in D$ e*

$$v \in V_a = \{v \in V\ :\ v = 0\ em\ \partial\Omega\}.$$

*Assim,*

$$
\begin{aligned}
& \delta J(u; v) \\
= & \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(u+\varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} \\
= & \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\gamma/2)\int_\Omega (\nabla u + \varepsilon\nabla v)\cdot(\nabla u + \varepsilon \nabla v)\ dx - (\gamma/2)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u\ dx - \int_\Omega (u + \varepsilon v - u) f\ dx}{\varepsilon} \\
= & \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\gamma\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\ dx - \int_\Omega f v\ dx + \varepsilon(\gamma/2)\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v\ dx\right) \\
= & \gamma\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\ dx - \int_\Omega f v\ dx.
\end{aligned} \tag{181}
$$

*Logo,*

$$
\begin{aligned}
J(u+v) - J(u) &= (\gamma/2)\int_\Omega (\nabla u + \nabla v)\cdot(\nabla u + \nabla v)\ dx - (\gamma/2)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u\ dx \\
&\quad - \int_\Omega (u + v - u) f\ dx \\
&= \gamma\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\ dx - \int_\Omega f v\ dx + (\gamma/2)\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v\ dx \\
&\geq \gamma\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\ dx - \int_\Omega f v\ dx \\
&= \delta J(u; v)
\end{aligned} \tag{182}
$$

$\forall u \in D,\ v \in V_a.$

*Disto podemos concluir que $J$ é convexo.*

*Das hipóteses $u_0 \in D$ é tal que*

$$\gamma \nabla^2 u_0 + f = 0, \ \ em\ \Omega.$$

*Seja $v \in V_a$.*

*Portanto, temos que,*

$$\begin{aligned} \delta J(u_0; v) &= \gamma \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f v \, dx \\ &= \gamma \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx + \gamma \int_\Omega \nabla^2 u_0 v \, dx \\ &= \gamma \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx - \gamma \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \nabla u_0 \cdot \mathbf{n} \, v \, ds \\ &= 0 \end{aligned} \tag{183}$$

*onde* $\mathbf{n}$ *denota o campo normal exterior à $\partial\Omega$.*

*Resumindo obtivemos, $\delta J(u_0; v) = 0, \ \forall v \in V_a$.*

*Sendo $J$ convexo, disto concluímos que $u_0$ minimiza $J$ em $D$.*

*Observe agora que,*

$$\begin{aligned} J(u) &= G(\nabla u) + F(u) \\ &= -\langle \nabla u, v^* \rangle_Y + G(\nabla u) + \langle \nabla u \cdot v^* \rangle_Y + F(u) \\ &\geq \inf_{v \in Y} \{-\langle v, v^* \rangle_Y + G(v)\} \\ &\quad + \inf_{u \in U} \{\langle \nabla u, v^* \rangle_Y + F(u)\} \\ &= -G^*(v^*) - F^*(-\Lambda^* v^*), \ \forall u \in U, \ v^* \in Y^*. \end{aligned} \tag{184}$$

*Resumindo,*

$$\inf_{u \in D} J(u) \geq \sup_{v^* \in Y^*} \{-G^*(v^*) - F^*(-\Lambda^* v^*)\}. \tag{185}$$

*Também das hipóteses, temos que $v_0^* = \gamma \nabla u_0$.*

*E assim*

$$v_0^* = \frac{\partial G(\nabla u_0)}{\partial v},$$

*de modo que*

$$\begin{aligned} G^*(v_0^*) &= \sup_{v \in Y} \{\langle v, v_0^* \rangle_Y - G(v)\} \\ &= \langle \nabla u_0, v_0^* \rangle_Y - G(\nabla u_0) \\ &= -\langle u_0, div\ v_0^* \rangle_{L^2} - G(\nabla u_0). \end{aligned} \tag{186}$$

*Por outro lado, de* $v_0^* = \gamma \nabla u_0$, *obtemos*

$$div\ v_0^* = \gamma div(\nabla u_0) = \gamma \nabla^2 u_0 = -f$$

*Disto e (186), obtemos,*

$$G^*(v_0^*) = -\langle u_0, f\rangle_{L^2} - G(\nabla u_0),$$

*e de*

$$div\ v_0^* + f = 0$$

*obtemos*

$$F^*(-\Lambda^* v_0^*) = 0.$$

*Logo*

$$G(\nabla u_0) - \langle u_0, f\rangle_{L^2} = -G^*(v_0^*) - F^*(-\Lambda^* v_0^*),$$

*de modo que disto e (185) temos que*

$$\begin{aligned} J(u_0) &= \min_{u \in D} J(u) \\ &= \min_{u \in D}\{G(\Lambda u) + F(u)\} \\ &= \max_{v^* \in Y^*}\{-G^*(v^*) - F^*(-\Lambda^* v^*)\} \\ &= -G^*(v_0^*) - F^*(-\Lambda^* v_0^*). \end{aligned} \tag{187}$$

*A solução está completa.*