Cálculo Variacional
Primeira Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

April 16, 2018

1. Sejam $V = C^1([a,b])$ e $F : D \subset V \to \mathbb{R}$ onde
$$F(y) = \int_0^1 \left(\frac{(y'(x))^4}{4} + y(x) \right)\, dx,$$
e onde
$$D = \{y \in V \;:\; y(0) = 1\}.$$
   (a) Sejam $y \in D$ e $v \in V_a$. Calcule
$$\delta F(y; v) \text{ e } \delta^2 F(y; v, v).$$
   (b) Prove que F é convexo.
   (c) Mostre que se $y_0 \in D$ é tal que
$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[y_0'(x)^3] = 1, \; \forall x \in [a,b], \\ \\ y_0'(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$
   então y_0 minimiza F em D.
   (d) Obtenha o ponto $y_0 \in D$ ótimo.

2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado, conexo e com uma fronteira regular (Lipschtziana) $\partial\Omega$.

   Sejam $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ e $V = C^1(\overline{\Omega})$ com a norma,
$$\|y\|_V = \max\{|y(x)| + \sum_{j=1}^n |y_{x_j}(x)| \;:\; x \in \overline{\Omega}.\}.$$
   Defina $F : V \to \mathbb{R}$ como
$$F(y) = \int_\Omega f(x, y(x), \nabla y(x))\, dx.$$
   Prove que F é contínuo em norma em V.

3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, limitado, conexo e com uma fronteira regular (Lipschitziana) $\partial\Omega$. Sejam $V = C^1(\overline{\Omega})$ com a norma especificada no exercício 2 e $F : V \to \mathbb{R}$ onde

$$F(y) = \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla y \, dx + \frac{\alpha}{4}\int_\Omega y^4 \, dx - \frac{\beta}{2}\int_\Omega y^2 \, dx,$$

e onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\gamma > 0$ são constantes reais.

(a) Prove que F é contínuo em V.

(b) Sejam $y, v \in V$. Calcule

$$\delta F(y; v) \text{ e } \delta^2 F(y; v, v).$$

(c) Mostre que se $y_0 \in D$ é tal que

$$\begin{cases} -\gamma\nabla^2 y_0(x) + \alpha y_0(x)^3 - \beta y_0(x) = 0, \ \forall x \in \Omega, \\ \\ \nabla y_0 \cdot \mathbf{n} = 0, \ \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

e $\delta^2 F(y; v, v) \geq 0$, $\forall v \in V_a, \forall y \in B_r(y_0)$, para algum $r > 0$, então y_0 minimiza F em $B_r(y_0)$.

Aqui $\mathbf{n}$ denota o campo normal exterior à $\partial\Omega$.

4. Sejam $V = C^1([a, b])$ e $J : D \subset V \to \mathbb{R}$ onde

$$J(y) = \frac{\gamma}{2}\int_0^1 \left(y'(x) + \frac{1}{2}y'(x)^2\right)^2 dx - \int_0^1 P(x)y(x)\, dx,$$

onde $P \in C([0, 1])$, $\gamma > 0$ e onde

$$D = \{y \in V \ : \ y(0) = y(1) = 0\}.$$

(a) Mostre que J é contínuo em D.

(b) Sejam $y \in D$ e $v \in V_a$. Calcule

$$\delta J(y; v) \text{ e } \delta^2 J(y; v, v).$$

(c) Obtenha condições de primeira e segunda ordem suficientes para que $y_0 \in D$ seja um ponto de mímimo local para J em D

5. Sejam $V = C^1([a, b])$ e $F : D \subset V \to \mathbb{R}$ onde

$$F(y) = \int_1^2 \left(e^{y'(x)} + y(x)\right) dx,$$

e onde

$$D = \{y \in V \ : \ y(1) = 1 \text{ e } y(2) = 3\}.$$

(a) Sejam $y \in D$ e $v \in V_a$. Calcule

$$\delta F(y; v) \text{ e } \delta^2 F(y; v, v).$$

(b) Prove que F é convexo.

(c) Mostre que se $y_0 \in D$ é tal que

$$\left\{ \ \frac{d}{dx}[e^{y_0'(x)}] = 1, \ \forall x \in [a, b], \right. \tag{3}$$

então y_0 minimiza F em D.

(d) Obtenha o ponto $y_0 \in D$ ótimo.