Introdução à Análise - Primeira Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

March 20, 2016

1. Prove por indução que,

   (a)
   $$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

   (b)
   $$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + ... + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

   (c)
   $$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + ... + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{n}{3n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

   (d)
   $$n^2 \leq n!, \ \forall n \geq 4,$$

   (e)
   $$2^n > n^2, \ \forall n \geq 5,$$

   (f)
   $$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } x \neq 1,$$

2. Prove por indução que se A e B são matrizes quadradas tais que

   $$AB = BA,$$

   então

   $$AB^n = B^n A, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que

   $$f(n+m) = f(n) + f(m), \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

(a) Prove que

$$f(na) = nf(a), \ \forall a, n \in \mathbb{N}.$$

Dica: Fixe $a \in \mathbb{N}$ e defina

$$A = \{n \in \mathbb{N} \ : \ f(na) = nf(a)\},$$

e prove por indução que

$$A = \mathbb{N}.$$

(b) Prove que existe $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = bn, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$