Introdução à Análise - Segunda Lista de Exercícios

Prof. Fabio Silva Botelho

April 1, 2016

1. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não-vazios e limitados superiormente.
   Defina
   $$A + B = \{x + y \;:\; x \in A \text{ and } y \in B\}.$$
   Mostre que $A + B$ é limitado superiormente e
   $$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

2. Seja $X \subset \mathbb{R}$. A função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser limitada superiormente se sua imagem
   $$f(X) = \{f(x) \;:\; x \in X\},$$
   é limitada superiormente. Em tal caso definimos o supremo de f em X por
   $$\sup f = \sup\{f(x) \;:\; x \in X\}.$$
   Dadas duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$, a soma $(f + g) : X \to \mathbb{R}$ é definida por
   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \; \forall x \in X.$$
   Prove que se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são limitadas superiormente, então $f + g$ também o é. Prove também que
   $$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g.$$
   Finalmente, dê um exemplo no qual a desigualdade estrita é válida.

3. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado e não vazio. Defina $-A$ por
   $$-A = \{-x \;:\; x \in A\}.$$
   Prove que
   $$\inf A = -\sup(-A).$$

4. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e limitado e seja $c > 0$.

   Defina cA por
$$cA = \{cx \ : \ x \in A\}.$$
   Mostre que
$$\sup(cA) = c \sup A,$$
   e
$$\inf(cA) = c \inf A.$$

5. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, conjuntos não-vazios e limitados.

   Defina
$$A \cdot B = \{xy \ : \ x \in A \text{ e } y \in B\}.$$
   Prove que
$$\sup(A \cdot B) = \sup A \ \sup B$$
   e
$$\inf(A \cdot B) = \inf A \ \inf B.$$

6. Verifique se o conjuntos abaixo são enumeráveis ou não. Em cada item, justifique a sua resposta.

   (a) O conjunto de todas as sequências tendo somente 0 e 1 como entradas, com exatamente 3 entradas iguais a 1.

   (b) Para $k \in \mathbb{N}$, o conjunto de todas as sequências tendo somente 0 e 1 como entradas, com no máximo k entradas iguais a 1.

   (c)
$$\mathcal{A} = \{\{a_n\} \ : \ a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \ \text{ tal que } a_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ exceto para um número finito de } n's\}.$$

   (d)
$$\mathcal{B} = \{\{a_n\} \ : \ a_n \in \mathbb{N} \text{ e } a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

   (e)
$$\mathcal{C} = \{\{a_n\} \ : \ a_n \text{ é primo } \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

   (f)
$$\mathcal{D} = \{\{a_n\} \ : \ a_n \in \mathbb{N} \text{ e } a_{n+1} \text{ é um múltiplo de } a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

   (g)
$$\mathcal{E} = \{\{a_n\} \ : \ a_n \in \mathbb{N} \text{ e } a_{n+1} \text{ é um divisor de } a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

   (h) O conjunto de todos os polinômios em x com coeficientes racionais.

   (i) O conjunto de todas as séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tais que $a_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

7.

8. Prove que se um conjunto B é enumerável e existe uma função injetiva

$$f : A \to B,$$

então A é enumerável.

9. Seja A um conjunto enumerável e seja B um conjunto finito. Construindo uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $A \cup B$, prove que $A \cup B$ é enumerável.